3.A.44 : CRECIMIENTO ECONÓMICO (II). MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO: RENDIMIENTOS CRECIENTES, CAPITAL HUMANO E INNOVACIÓN TECNOLÓGICA.

Con el cambio de temario, a partir de la convocatoria de 2023 este tema pasará a ser:
3.A.44: Crecimiento económico (II). Modelos de crecimiento endógeno: rendimientos crecientes, capital humano e innovación tecnológica.

De este modo, con lo escrito en este documento este tema estaría **actualizado**.

A.44. Crecimiento económico (II). Modelos de crecimiento endógeno: rendimientos crecientes, capital humano e innovación tecnológica	
Título anterior	A.43. Teorías del crecimiento económico (II). Modelos de crecimiento endógeno: rendimientos crecientes, capital humano e innovación tecnológica.
Motivación del cambio	Sin cambios.
Propuesta de contenido /estructura	I. El modelo AK, análisis comparado al modelo de Solow II. Crecimiento por externalidades del capital físico III. Crecimiento por acumulación de capital humano IV. Crecimiento por acumulación de variedades de inputs. El modelo de Romer. V. Evidencia empírica

INTRODUCCIÓN

https://www.youtube.com/watch?v=5iqjUt1I0VU Can an Economy Grow Forever? – Economics Explained (el comienzo está muy bien y podría valer de enganche alternativo o de cierre).

https://youtu.be/mi49GjJOPm0?list=PLmtuEaMvhDZbNVIDHA-MTVH0sLb5HP7Pn – *Why Are Some Countries Rich and Others Poor?* | Economics for People with Ha-Joon Chang (Está muy bien)

https://www.economist.com/finance-and-economics/2022/05/07/why-long-term-economic-growth-often-disappoints

https://www.economist.com/finance-and-economics/2018/04/12/economists-understand-little-about-the-causes-of-growth

- ***Enganche***:
  - *"Un enfoque del crecimiento económico que depende en tan gran medida de una variable exógena es notoriamente insatisfactorio desde el punto de vista intelectual y más aún si se trata de una variable de tan difícil medición como es la cantidad de conocimiento. Desde una perspectiva cuantitativa y empírica, nos quedamos con que una de las variables explicativas del modelo es el tiempo. Ahora bien, por más necesaria que sea en la práctica, una tendencia temporal es una mera confesión de ignorancia y, lo que es peor, desde un punto de vista práctico no se trata de una variable de política económica".*

    KENNETH ARROW (1962)
  - La ciudad de Nogales está dividida en dos mitades por una valla.
    - En el norte se encuentra Nogales, Arizona. La renta media es de 30.000 dólares al año. La población está relativamente sana y la esperanza de vida es relativamente alta.
    - La vida en el sur de la valla es diferente. En Nogales (Sonora) la renta media es ⅓ a la de Nogales (Arizona). La mayoría de la población adulta no tiene un diploma escolar y muchos adolescentes no están en las escuelas. Las condiciones sanitarias son deficientes y existen todavía elevadas tasas de mortalidad infantil.

      
      - *¿Qué explica la diferencia entre las dos Nogales?*
        La diferencia entre las dos partes de Nogales es que una se encuentra bajo la jurisdicción de los Estados Unidos y la otra pertenece a México.
  - ¿Por qué unos países son más ricos que otros? ¿Por qué crecen las economías?
    - Existen enormes diferencias en la riqueza per cápita y la producción por trabajador entre los países en la actualidad. Por ejemplo, la producción por trabajador de España no es igual que la de Nigeria, y el consumo medio por persona tampoco.

- Estas y otras cuestiones son estudiadas por la *teoría del crecimiento económico*, que es la rama de la macroeconomía que estudia la evolución en el largo plazo de las variables macroeconómicas.

▪ ***Relevancia***:

- ROBERT LUCAS[1] afirmó que *"una vez que uno comienza a pensar en el crecimiento económico, es difícil pensar en otra cosa"*[2].
  - Y es que la **teoría del crecimiento económico** posiblemente sea la rama de la economía de mayor relevancia, ya que pequeños cambios en la tasa de crecimiento mantenidos durante largos períodos de tiempo generan grandes diferencias en los niveles de renta per cápita entre países, y en última instancia sobre la calidad de vida de sus habitantes.

▪ ***Contextualización***:

- *Desde un punto de vista histórico*, la *historia de la teoría del crecimiento* es tan larga como la historia del pensamiento económico.
  - Ya los ***economistas clásicos*** como ADAM SMITH, DAVID RICARDO o THOMAS MALTHUS estudiaron el tema e introdujeron conceptos fundamentales como el de rendimientos decrecientes y su relación con la acumulación de capital, la relación entre el progreso técnico y la especialización del trabajo, o el enfoque competitivo como instrumento del análisis del equilibrio dinámico[3].
  - Asimismo, los ***economistas neoclásicos de principios del siglo XX*** como FRANK RAMSEY, ALLYN YOUNG, FRANK KNIGHT o JOSEPH SCHUMPETER, contribuyeron de manera fundamental a nuestro conocimiento de los determinantes de la tasa de crecimiento y del progreso técnico.
  - Pero serían los ***economistas neoclásicos de la segunda mitad del siglo XX*** los que dieran un vuelco a la literatura existente en esta rama de la economía.
    - A partir del trabajo de SOLOW[4] (1956) y SWAN (1956), las décadas de 1950 y 1960 vieron cómo la revolución neoclásica llegaba a la teoría del crecimiento económico y ésta disfrutaba de un renacimiento que sentó las bases metodológicas utilizadas no sólo por los teóricos del crecimiento, sino también por todos los macroeconomistas modernos.
    - El análisis neoclásico se completó con los trabajos de CASS (1965) y KOOPMANS (1965), que reintrodujeron el enfoque de optimización intertemporal desarrollado por RAMSEY (1928) para analizar el comportamiento óptimo de los consumidores en un modelo neoclásico.
      - En ambos casos, el supuesto neoclásico de rendimientos decrecientes de cada uno de los factores tenía como consecuencia casi devastadora el hecho de que el crecimiento a largo plazo debido a la acumulación de capital era casi insostenible y por lo tanto, el crecimiento económico según estos modelos ha de ser explicado por factores exógenos al modelo.
      - En cualquier caso, se trata de modelos muy estilizados, por lo que deben ser considerados como un punto de partida, un trampolín sobre el que se

[1] ROBERT LUCAS fue galardonado con el Premio Nobel de Economía en 1995 «Por desarrollar la hipótesis de las expectativas racionales, que transformó el análisis de la macroeconomía y permitió profundizar en el conocimiento de la política económica».

[2] Lucas, R. E. (1988). On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, *22*(1), 3-42. https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7

[3] Estos autores buscan explicar las fuentes del progreso de las naciones, es decir, factores que actúan como motor de crecimiento económico. Destacan las aportaciones de:
- ADAM SMITH hablaba de la *división del trabajo*, que permitía mayor especialización y ganancias en productividad.
- DAVID RICARDO subrayó el papel del *comercio internacional*, clave ante los rendimientos decrecientes en el cultivo de las tierras.

[4] ROBERT SOLOW fue galardonado con el Premio Nobel de Economía en 1987 «Por sus contribuciones a la teoría del crecimiento económico».

impulsarán el resto de teorías del crecimiento económico y que ofrezcan explicaciones más satisfactorias[5].

- En las ***décadas siguientes*** a la presentación de estos modelos, la teoría del crecimiento económico fue centrándose cada vez más en la complejidad matemática y cada vez menos en la aplicabilidad empírica.
  - La pérdida de contacto con la realidad hizo que el interés fuera trasladándose desde la teoría del crecimiento económico hacia las *teorías de ciclos*[6] y que, dentro de la *teoría del crecimiento*, las *teorías del desarrollo* tomasen el relevo.
    - No obstante, las teorías del desarrollo tenían una reducida sofisticación analítica, lo que limitaba el alcance de esta rama [ver tema 3.B.29].
- Habrá que esperar hasta ***mediados de los años 80*** para asistir a la revitalización de la teoría del crecimiento, fruto de los trabajos de ROMER y LUCAS, que dan lugar a modelos en los que el progreso técnico deja de ser exógeno (la principal limitación del modelo de SOLOW) y que, por ello, se conocen como **modelos de crecimiento endógeno**, y que precisamente serán el objeto de esta exposición.
  - El modelo neoclásico de crecimiento explicaba el crecimiento a largo plazo en función de la tasa de progreso técnico, la cual considera como dada exógenamente.
    - Hay una buena razón, sin embargo, para pensar que el cambio tecnológico depende de decisiones económicas porque viene de innovaciones industriales realizadas por empresas que buscan maximizar beneficios y depende de la financiación a la ciencia, de la acumulación de capital humano y de otras actividades económicas. **La tecnología es, por tanto, una variable endógena, que debe ser determinada por el sistema económico**.
  - Existen 2 maneras de superar la principal crítica del modelo de SOLOW y permitir que la renta per cápita creciese a una tasa de crecimiento sostenida sin necesidad de factores exógenos:
    a. *Asumir una función de producción no neoclásica*, tal y como harán los modelos de acumulación de capital físico y humano.
    b. *Asumir competencia imperfecta*, como proponen los modelos de innovación tecnológica.

- ***Problemática (Preguntas clave)***:
  – ¿Por qué unos países son más ricos que otros? ¿Por qué crecen las economías?
  – ¿Es posible crecer sostenidamente en el largo plazo) ¿En qué medida importa la dotación inicial de factores? ¿Qué economías crecerán más en los próximos años y por qué? ¿Puede el sector público implementar políticas que aceleren el crecimiento económico?

[5] Ya en la década de 1960, UZAWA realizaría una contribución pionera al introducir el capital humano en la función de producción (influenciado por economistas de la escuela de Chicago). Sin embargo, esta literatura no despega y la crisis del petróleo aleja el foco de la teoría del crecimiento económico.

[6] En la década de 1970, debido a las crisis del petróleo el foco de atención se desplaza del crecimiento a la teoría de los ciclos económicos.

- ***Estructura***:

1. MODELOS DE ACUMULACIÓN DE CAPITAL FÍSICO Y HUMANO (1ª GENERACIÓN): FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN NO NEOCLÁSICA

1.1. Idea

- La primera manera de desviarse de los supuestos neoclásicos es *abandonar la función de producción neoclásica de buen comportamiento*.
  - En esta sección mostraremos que un simple cambio en la función de producción genera un universo nuevo de predicciones y de recomendaciones de política económica, a la vez que nos permite explicar el crecimiento a largo plazo.

1.2. Modelos

1.2.1. Modelo AK (Rebelo, 1991)

Realizar el modelo comparando los resultados con los resultados del modelo de Solow [ver tema 3.A.43]

Idea

- Para desarrollar esta idea, estudiaremos el sencillo modelo AK propuesto por Rebelo (1991)
- Imaginemos que la función de producción es lineal en el stock de capital[7],

$$Y_t = A \cdot K_t$$

donde A es una constante. Esta función de producción se llama, por razones obvias, *"tecnología AK"*.
  - Aunque algunos economistas utilizaron en un momento u otro algún tipo de tecnologías lineales, la introducción del modelo lineal en la nueva literatura sobre crecimiento endógeno de los años 80 se atribuye a Rebelo (1991).
- En principio, esta función de producción puede parecer descabellada, puesto que ignora totalmente la existencia de trabajo y todos sabemos que se necesitan trabajadores para producir bienes y servicios. Un segundo análisis, sin embargo, nos muestra cómo, teniendo en cuenta el concepto de capital humano, el supuesto de función de producción AK no es tan descabellado. Para que un cuerpo humano sea productivo y pueda ser clasificado como "trabajo", la sociedad (los padres, los

[7] Dado que la función de producción no depende del trabajo, las ganancias del factor trabajo será cero ($w_t = 0$). Esta es una de las características del modelo AK que lo hacen poco atractivo. Sin embargo, podría relajarse fácilmente este resultado de la siguiente manera [ver tema antiguo 3.A.43 ICEX-CECO pág. 7]:

- Supongamos que la función de producción es $Y_t = A \cdot F(K_t, Q_t L_t) = A \cdot K_t{}^{\alpha} \cdot (Q_t \cdot L_t)^{1-\alpha}, \alpha \in (0,1)$, donde Q_t es el nivel de conocimiento agregado de la economía disponible para la empresa. Si suponemos que el conocimiento aumenta con la industrialización y es proporcional al stock de capital físico por trabajador, de forma que $Q_t = K_t/L_t$, podemos representar la forma de producción de la siguiente forma:

$$Y_t = A \cdot K_t{}^{\alpha} \cdot \left(\frac{K_t}{L_t} L_t\right)^{1-\alpha} = A \cdot K_t{}^{\alpha} \cdot (K_t)^{1-\alpha} = A \cdot K_t$$

- Este supuesto recoge la idea del modelo de Arrow (1962) de que un incremento en el stock de capital de la empresa conduce a un incremento en el stock de conocimiento. A esta característica se le denomina *"learning by doing"*, es decir, conforme se adquiere experiencia en la producción de bienes, la productividad del trabajo aumenta y se produce más eficientemente.
- Así, si suponemos que existen M empresas en la economía, el comportamiento de la empresa individual se podría resumir en el siguiente programa de optimización:

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \pi_t = A \cdot \left(\frac{K_t}{M}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{Q_t \cdot L_t}{M}\right)^{1-\alpha} - (r_t + \delta) \cdot \frac{K_t}{M} - W_t \cdot \frac{Q_t \cdot L_t}{M}$$

C.P.O.:

$$\frac{\partial \pi_t}{\partial K_t} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{K_t}{M}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{Q_t \cdot L_t}{M}\right)^{1-\alpha} - \frac{r_t + \delta}{M} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{Q_t \cdot L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} = r_t + \delta \Rightarrow r_t = \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{Q_t \cdot L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} - \delta \xrightarrow[Q_t \cdot L_t = K_t]{\text{En equilibrio}} \boxed{r_t = \alpha \cdot A - \delta}$$

$$\pi_t = 0 \Rightarrow A \cdot \left(\frac{K_t}{M}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{Q_t \cdot L_t}{M}\right)^{1-\alpha} - \alpha \cdot A \cdot \frac{K_t}{M} - W_t \cdot \frac{Q_t \cdot L_t}{M} = 0 \Rightarrow A \cdot \left(\frac{K_t}{M}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{Q_t \cdot L_t}{M}\right)^{1-\alpha} - \alpha \cdot A \cdot \frac{K_t}{M} = W_t \cdot \frac{Q_t \cdot L_t}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_t = A \cdot K_t{}^{\alpha} \cdot Q_t \cdot L_t{}^{-\alpha} - \alpha \cdot A \cdot \left(\frac{K_t}{Q_t \cdot L_t}\right) \xrightarrow[Q_t \cdot L_t = K_t]{\text{En equilibrio}} \boxed{W_t = A \cdot (1 - \alpha)}$$

En definitiva, introduciendo el stock de conocimientos en la función de producción, mantenemos el modelo AK y evitamos el resultado de hacer los salarios cero.

educadores o las empresas) debe invertir muchos recursos en él. Estos recursos toman la forma de comida, medicamentos o educación.

- Dicho de otro modo, el factor trabajo necesita inversión, en el sentido de que debemos sacrificar consumo presente para aumentar la productividad de lo que llamamos trabajo.
- En los modelos de crecimiento exógeno, como por ejemplo el modelo de SOLOW (1956), se supone que el factor trabajo aumenta a un ritmo exógeno, n, de forma gratuita y sin necesidad de gastar recursos. En realidad, sin embargo, el factor trabajo aumenta de una manera parecida a como se modeliza el capital en ese modelo: sacrificando consumo actual.
- En resumen, según este enfoque, el capital y el trabajo son, en realidad, dos tipos de capital diferentes (físico y humano) pero, al fin y al cabo, ambos son capital. Si todos los inputs de la función de producción son capital y existen rendimientos constantes de escala, la función de producción debe tener la forma AK.

Modelo

Supuestos

Lo único que cambia respecto al modelo de SOLOW es la función de producción neoclásica de buen comportamiento que pasa a ser una función AK.

- REBELO parte de los siguientes supuestos (igual que SOLOW salvo por la función de producción):
  - ***Demanda agregada***: *Economía cerrada y sin sector público* ($NX = 0$; $G = 0$) *con un único bien de producción*, Y_t[8]:

$$Y_t = C_t + I_t \cancel{+ G_t + (X_t - M_t)}$$

  - ***Oferta agregada***: *Función de producción de tecnología AK*:

$$Y_t = A_t \cdot K_t$$

    donde:
    - Y_t es la producción total del bien final en el período t.
    - K_t es el stock de capital. Corresponde a la cantidad de equipamiento y estructuras usadas en la producción y generalmente se expresa como el valor de éstas. Hay muchas maneras de pensar en el capital, pero por sencillez supondremos que se refiere al mismo bien final de la economía, que, en vez de haber sido consumido, ha sido usado en el proceso de producción para obtener más bienes[9].
    - A_t representa la tecnología. La tecnología no tiene una unidad de medida natural, es simplemente un *variador* de la función de producción. Por conveniencia matemática se suele representar como un número, pero es útil tener en cuenta que es la representación de un concepto más abstracto.
      - Un supuesto clave de este modelo es que la tecnología es un *bien público* [ver tema 3.A.23]: es un bien *no rival* (su uso por parte de un individuo no impide que este sea usado al mismo tiempo por otros agentes) y *no excluible* (es imposible evitar que otro agente lo use). De este modo, una vez que la sociedad adquiere algún conocimiento útil para aumentar la eficiencia de la producción, este conocimiento podrá ser usado por cualquier empresa sin afectar a la producción del resto.

[8] Supondremos que la economía avanza en el tiempo de forma discreta (aunque el modelo se puede expresar en forma continua) hacia un horizonte infinito, de modo que el tiempo viene dado por los subíndices $t = 1, 2, \ldots$. Los períodos pueden corresponder a días, semanas, meses, años… Sin embargo, no hay necesidad de especificar su escala.

[9] Por ejemplo, podemos pensar que el bien final es maíz. El maíz puede ser usado para el consumo final o como factor productivo si lo sembramos con el objetivo de obtener más maíz en el futuro. De este modo, el capital corresponde a la cantidad de maíz usada en la producción.

La función de producción AK incumple algunas de las características de la función neoclásica de buen comportamiento[10]. Concretamente, incumple el supuesto de rendimientos marginales decrecientes y algunas de las condiciones de Inada:

$$Y_t = A \cdot K_t$$

- Tiene rendimientos constantes a escala en K_t. ✓
- La función de producción exhibe rendimientos marginales positivos pero decrecientes en K_t. ×
- Cumple las condiciones de Inada: ×
  - $F(K_t)$ es continuamente diferenciable. ✓
  - $F(K_t)$ es estrictamente creciente en K_t. ✓
  - $\lim_{K_t \to 0} F(K_t) = 0$ ✓
  - $\lim_{K_t \to +\infty} F(K_t) = +\infty$ ✓
  - $\lim_{K_t \to 0} \frac{\partial F(K_t)}{\partial K_t} = +\infty$ ×
  - $\lim_{K_t \to +\infty} \frac{\partial F(K_t)}{\partial K_t} = 0$ ×

– ***Empresas:** Hay competencia perfecta en los mercados de bienes y de factores*: Este supuesto es básico para entender el funcionamiento y resultados del modelo. Así, en competencia perfecta, la igualdad necesaria entre ahorro e inversión se produce en cada momento, para un nivel de renta que es el de pleno empleo de los factores productivos. La *plena e instantánea flexibilidad de todos los precios* garantiza este resultado. En competencia perfecta, también se retribuyen a los factores productivos según su productividad marginal y junto con el supuesto de

[10] Recordemos que la función de producción *neoclásica de buen comportamiento* presenta las siguientes **características**:

- *La función de producción exhibe rendimientos marginales positivos pero decrecientes en los factores productivos K_t y L_t:*
  - $\frac{\partial F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial K_t} > 0$ y $\frac{\partial F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial L_t} > 0$
  - $\frac{\partial^2 F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial K_t^2} < 0$ y $\frac{\partial^2 F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial L_t^2} < 0$
- *Rendimientos constantes a escala en K_t* y L_t. Algebraicamente, esto quiere decir que si doblamos la cantidad de factor trabajo y del factor capital la cantidad de producto se dobla. Si multiplicamos K_t y L_t por una constante arbitraria, λ, entonces la producción también se multiplica por la misma constante:

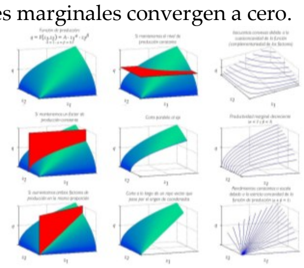
$$F(\lambda \cdot K_t, A_t \cdot \lambda \cdot L_t) = \lambda \cdot F(K_t, A_t \cdot L_t)$$

  - Matemáticamente, esta propiedad se conoce con el nombre de *homogeneidad de grado uno*.
  - Como se puede apreciar, se ha multiplicado el capital y el trabajo por λ, pero no la tecnología. La razón por la que este supuesto es razonable es el *principio de réplica*. Nótese que los rendimientos constantes a escala son en K_t y L_t, pero no en A_t, ya que los factores capital y trabajo son rivales, es decir, la utilización de una unidad de estos factores en la producción de un bien impide que esos recursos sean utilizados en la producción de otro (no puedo utilizar el mismo horno a la vez para hacer varias tartas, ni el mismo esfuerzo del trabajo). Sin embargo, la tecnología es un factor no rival, pues sí que puedo utilizar la misma receta a la vez para hacer dos tartas. Por lo tanto, según el principio de réplica, la fórmula de producción (la tecnología) se puede usar en la producción de distintos bienes dado a que la fórmula es un bien no rival.
- *Debe cumplir un conjunto de requisitos conocidos como las condiciones de Inada* (debidas al economista japonés KEN-ICHI INADA (1963)): La función de producción, $F(K_t, A_t \cdot L_t)$, satisface las condiciones de Inada si:

  $F(K_t, A_t \cdot L_t)$ es continuamente diferenciable.
  $F(K_t, A_t \cdot L_t)$ es estrictamente creciente en K_t, L_t.
  $\lim_{K_t \to 0} F(K_t, A_t \cdot L_t) = 0$ para todo L_t y todo A_t.
  $\lim_{K_t \to +\infty} F(K_t, A_t \cdot L_t) = +\infty$ para todo L_t y todo A_t.
  $\lim_{K_t \to 0} \frac{\partial F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial K_t} = +\infty$ para todo $L_t > 0$ y todo A_t.
  $\lim_{K_t \to +\infty} \frac{\partial F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial K_t} = 0$ para todo $L_t > 0$ y todo A_t.
  $\lim_{L_t \to 0} F(K_t, A_t \cdot L_t) = 0$ para todo K_t y todo A_t.
  $\lim_{L_t \to +\infty} F(K_t, A_t \cdot L_t) = +\infty$ para todo K_t y todo A_t.
  $\lim_{L_t \to 0} \frac{\partial F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial L_t} = +\infty$ para todo $K_t > 0$ y todo A_t.
  $\lim_{L_t \to +\infty} \frac{\partial F(K_t, A_t \cdot L_t)}{\partial L_t} = 0$ para todo $K_t > 0$ y todo A_t.

  - Las condiciones de Inada son las hipótesis sobre la forma de una función de producción que garantizan la ruta de estabilidad de un crecimiento económico en el modelo de crecimiento neoclásico. Se puede demostrar que las condiciones de Inada implican que la función de producción debe ser asintóticamente del tipo Cobb-Douglas.

Estas condiciones implican que las primeras unidades de trabajo y capital son altamente productivas, y que cuando el capital o el trabajo son suficientemente abundantes sus productividades marginales convergen a cero.



rendimientos constantes a escala de la función de producción, se genera el resultado de que los pagos a los inputs agotan toda la renta (por el teorema de Euler).

$$\max_{\{K_t \geq 0\}} \Pi_t = \underbrace{(A_t \cdot K_t)}_{Y_t} \cdot \underbrace{P_t}_{=1} - R_t \cdot K_t$$ [11]

En este problema de optimización hay algunas características que merece la pena destacar (ACEMOĞLU, 2009, págs. 31 y 32):

- El problema de maximización está en términos de variables agregadas, que, dado el supuesto de empresa representativa, es así sin pérdida de generalidad.
- El precio del bien P_t ha sido normalizado a 1. La ley de Walras implica que el precio de uno de los bienes, el numerario, puede ser normalizado a 1. De hecho, lo que estamos haciendo aquí es ir más allá, ya que estamos normalizando el precio del bien final a 1 *en todos los períodos*. Normalmente, no se podría elegir más de un bien numerario –ya que estaríamos fijando el precio relativo entre estos bienes–. Sin embargo, siguiendo el planteamiento de KENNETH ARROW (1964)[12] es suficiente con introducir el precio de algún activo que permita transferir una unidad de consumo de un período a otro, en otras palabras, necesitamos introducir el concepto de tipo de interés entre períodos, r_t, que determina los precios intertemporales y nos permite normalizar el precio del bien final a uno en cada período.
- Esta manera de escribir el problema ya impone mercados de factores competitivos, ya que la empresa toma como dados los precios de los factores productivos W_t y R_t (que están en términos del numerario, el bien final).
  - Un aspecto importante es que *debido a los rendimientos constantes a escala* de $F(A_t, K_t)$, *el problema de maximización podría no tener una solución bien definida si no imponemos el vaciamiento del mercado de factores*; pues podrían darse las siguientes situaciones:
    - Que no exista ningún K_t que maximice el beneficio (cuando este sea infinito);
    - Que la solución que maximice beneficios sea $K_t = 0$; o
    - Que existan múltiples valores de K_t que maximicen el beneficio (cuando este sea 0).

    Este problema está relacionado con el hecho de que, en un mundo con rendimientos a escala constantes, el tamaño de cada empresa no está determinado (solo lo están los valores agregados) [ver temas 3.A.11 y 3.A.12].
  - El mismo problema ocurre aquí si no hubiéramos impuesto la condición de que los mercados de factores deben vaciarse. Un equilibrio competitivo requiere que todas las empresas maximicen beneficios y los mercados de factores se vacíen. En particular, las demandas de trabajo y capital deben igualarse a su oferta en todos los períodos. Esta observación implica que la empresa representativa debe obtener un beneficio económico nulo, ya que de no ser así estaría dispuesta a contratar cantidades mayores de trabajo y capital.
    - Por lo tanto, es necesario imponer mercados de factores competitivos de forma que: $R_t = \partial F(K_t, A_t)/\partial K_t = A_t$. Así, se verifica que la empresa obtiene beneficio nulo debido a los rendimientos constantes a escala en K_t, ya que por el teorema de Euler:

$$Y_t = \underbrace{\underbrace{R_t}_{\partial F(K_t, A_t)/\partial K_t} \cdot K_t}_{=A_t \cdot K_t}$$

[11] Cuando existen inversiones irreversibles o costes de ajuste, el problema de maximización de las empresas se vuelve genuinamente intertemporal [ver temas 3.A.29 y 3.A.34]. Sin embargo, en su ausencia, maximizar beneficios de manera separada en cada período *t* es equivalente a maximizar el valor presente descontado de los beneficios. Esta característica simplifica el análisis considerablemente.

[12] En relación a su enfoque de preferencia por el estado [ver tema 3.A.10].

- ***Hogares:*** <u>*La economía admite agente representativo*</u>: Podemos suponer que los hogares son todos idénticos, por lo que la demanda de consumo y la oferta de trabajo pueden ser representadas como el resultado del comportamiento de un solo hogar[13].
  - Además, los *factores productivos son propiedad de los hogares* y tomamos K_0 como dado.
  - <u>*Tasa de ahorro constante e igual a* $s \in [0,1]$</u>[14]: Esto implica que los agentes no optimizan (no maximizan una función de utilidad), sino que, por sencillez, SOLOW y SWAN deciden suponer que consumen una fracción constante de su renta o producto. La razón por la que las familias consumen es que *les gusta* hacerlo. En la literatura macroeconómica moderna se supone que los consumidores eligen el consumo con el objetivo de maximizar una función de utilidad, sujetos a una restricción presupuestaria. De momento, seguiremos el modelo de SOLOW y SWAN, que simplifican, mediante el supuesto de que las familias simplemente consumen una fracción constante de su renta o producto. Esto implica que:

$$Y_t = C_t + I_t = \underbrace{(1-s)\cdot Y_t}_{C_t} + \underbrace{s\cdot Y_t}_{I_t}$$

    - En otras palabras, al igual que el consumo agregado, la inversión agregada es una fracción de la renta nacional $(1-s)$. Como se trata una economía cerrada sin gasto público, el ahorro y la inversión coinciden, *la tasa de ahorro es también la tasa de inversión*.
- <u>*El capital se acumula*[15] *con una tasa de depreciación constante*</u> $(\delta \in (0,1))$<u>*, con población igual a trabajo y tasa constante de crecimiento de la población*</u> $(\dot{L}/L = n)$<u>*, y tecnología constante*</u> $(A_t = A, \forall t \Rightarrow \dot{A}/A = 0)$:

$$K_{t+1} = K_t\cdot(1-\delta) + I_t$$
$$\Downarrow$$
$$\overbrace{K_{t+1} - K_t}^{\dot{K}_t} = \overbrace{I_t}^{s\cdot Y_t} - \delta\cdot K_t$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\dot{K}_t = s\cdot F(K_t, A_t\cdot L_t) - \delta\cdot K_t}$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{k}_t = \frac{d\left(\frac{K_t}{L_t}\right)}{dt} = \frac{\dot{K}_t\cdot L_t - K_t\cdot\dot{L}_t}{{L_t}^2} = \underbrace{\frac{\dot{K}_t}{L_t}}_{=\frac{s\cdot F(K_t,A_t\cdot L_t)-\delta\cdot K_t}{L_t}} - \underbrace{\frac{K_t}{L_t}}_{\equiv k_t}\cdot\underbrace{\frac{\dot{L}_t}{L_t}}_{\equiv n} = \underbrace{\frac{s\cdot F(K_t,A_t\cdot L_t)-\delta\cdot K_t}{L_t}}_{=s\cdot y_t-\delta\cdot k_t} - n\cdot k_t$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\dot{k}_t = s\cdot y_t - (\delta+n)\cdot k_t}$$

  - A estas ecuaciones se las conoce como <u>*ley fundamental de movimiento del modelo de Solow y Swan*</u>, y es que conociendo la evolución del capital conoceremos la evolución del nivel de producción[16].

---

[13] La heterogeneidad de los agentes nos interesa en materia de imposición o desigualdad. En cualquier caso, la homogeneidad de los agentes es asumible en un modelo de crecimiento económico.

[14] No es descabellado suponer constante la tasa de ahorro, pues la evidencia empírica ha demostrado que es bastante estable a largo plazo.

[15] El crecimiento económico y el desarrollo son procesos dinámicos y por lo tanto necesitan modelos dinámicos. A pesar de su simplicidad, el modelo de crecimiento de Solow es un modelo de equilibrio general dinámico (a pesar de que muchas características clave de los modelos de equilibrio general como las preferencias y la optimización dinámica, no se encuentran en este modelo).

[16] El modelo de Solow es una mezcla de un modelo keynesiano de la vieja escuela y un modelo macroeconómico moderno dinámico. Los hogares no optimizan en sus decisiones de ahorro-consumo, sino que su comportamiento viene definido por una tasa de ahorro constante. Sin embargo, las empresas maximizan beneficios y los mercados de factores se vacían. Por lo tanto es útil empezar por definir el equilibrio como es habitual en los modelos macroeconómicos dinámicos modernos.

Nótese que la notación que utilizaremos implica que[17]:

- Las <u>*letras en mayúsculas*</u> se refieren a valores en términos absolutos;

$$\underbrace{Y_t}_{\substack{\text{producción} \\ \text{en términos absolutos}}} = F(K_t, A_t)$$

- Las <u>*letras en minúsculas*</u> se refieren en valores en términos *per cápita* (o por trabajador, debido al supuesto de población igual a trabajo);

$$\frac{Y_t}{L_t} = \underbrace{y_t}_{\substack{\text{producción} \\ \text{per cápita}}} = F(k_t, A_t)$$

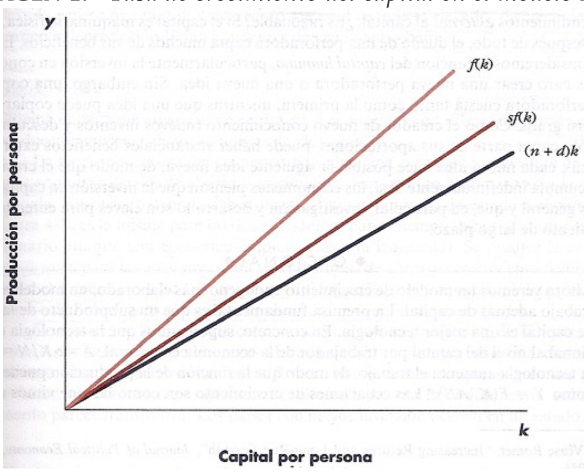
- Las <u>*letras en minúsculas con virgulilla*</u> se refieren a valores en términos por unidad de trabajo efectivo.

$$\frac{Y_t}{A_t \cdot L_t} = \frac{y_t}{A_t} = \underbrace{\tilde{y}_t}_{\substack{\text{producción} \\ \text{por unidad efectiva de trabajo}}} = F(\tilde{k}_t)$$

Por último, un punto encima de cualquiera de ellas hace referencia a su tasa de crecimiento.

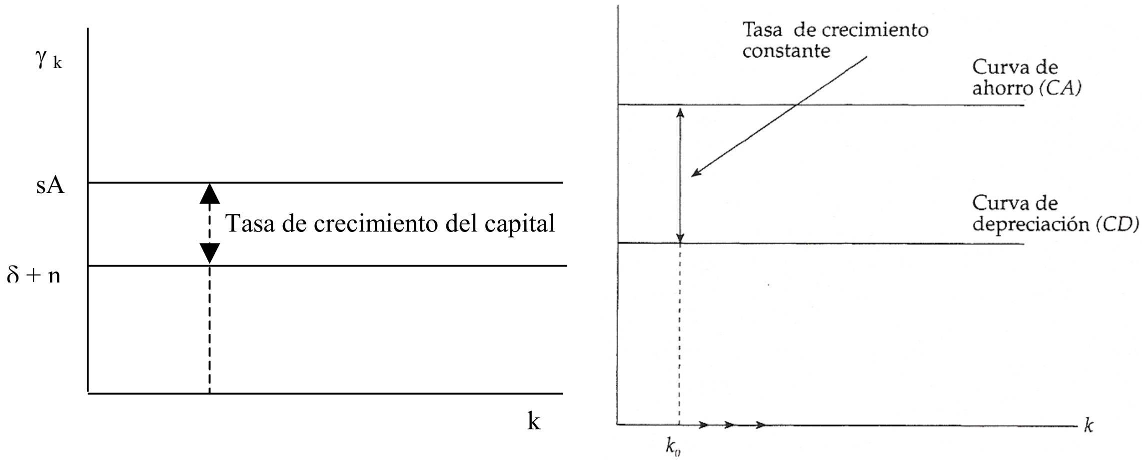
<u>*Desarrollo*</u>

IMAGEN 1.– *Tasa de crecimiento del capital en el modelo AK*



Fuente: …

IMAGEN 2.– *Tasa de crecimiento del capital en el modelo AK*



Fuente: …

[17] Podemos hacer esto ya que hemos asumido rendimientos constantes a escala en (K_t, L_t), que nos permiten trabajar con la función en su *forma intensiva* debido a la homogeneidad de grado uno:

$$\underbrace{Y_t}_{\substack{\text{producción en} \\ \text{términos absolutos}}} = F(K_t, A_t) \Rightarrow \frac{Y_t}{L_t} = \frac{F(K_t, A_t)}{L_t} = F(k_t, A_t) = \underbrace{y_t}_{\substack{\text{producción} \\ \text{per cápita}}} \Rightarrow \frac{Y_t}{A_t \cdot L_t} = \frac{F(K_t, A_t)}{A_t \cdot L_t} = F(\tilde{k}_t, 1) = \underbrace{\tilde{y}_t}_{\substack{\text{producción por} \\ \text{unidad efectiva de trabajo}}}$$

Implicaciones

- Existen 6 diferencias importantes entre este modelo y el modelo neoclásico.
  1) En primer lugar, la tasa de crecimiento del producto per cápita puede ser positiva, sin necesidad de tener que suponer que alguna variable crece continua y exógenamente ($g = 0$). Esta es una diferencia muy importante y es la que a menudo da nombre a este tipo de modelos: *modelos de crecimiento endógeno*.
  2) En segundo lugar, *la tasa de crecimiento viene determinada por factores visibles*, las economías con tasas de ahorro grandes van a crecer mucho, es más, un aumento en la tasa de ahorro, quizá inducida por una política fiscal por parte del Gobierno, provoca un incremento de la tasa de crecimiento. Por este motivo, contrariamente a lo que predice el modelo neoclásico, las políticas dirigidas a promover el ahorro (y la inversión) afectan a la tasa de crecimiento a largo plazo de la economía. Esto se puede ver en el gráfico, porque un aumento de la tasa de ahorro hace saltar la curva de ahorro hacia arriba y la distancia entre las curvas de ahorro y de depreciación aumenta. El mismo razonamiento es válido para las políticas que aumentan el nivel de la tecnología, A, reducen la tasa de crecimiento de la población, n, o la de depreciación, δ.
  3) En tercer lugar, *la economía carece de una transición hacia el estado estacionario, ya que siempre crece a una tasa constante*, con independencia del valor que adopte el stock de capital. Esto hace que este tipo de modelos lineales sea mucho más sencillo que los modelos neoclásicos que tienen complicadas dinámicas de transición. Aquí, la tasa de crecimiento de todas las variables es siempre constante.
     - Recordemos que en nuestra economía las familias ahorran e invierten una fracción constante, s, de su producto. Imaginemos que el stock de capital es pequeño. Este produce una cierta cantidad de producto, del cual se invierte la fracción s. Cada unidad invertida genera un aumento de la producción igual a A, por lo que el aumento total en el número de máquinas, sin tener en cuenta la depreciación, es igual a $s \cdot A \cdot k$. Este incremento se puede expresar en términos porcentuales, dividiendo por k, por lo que el aumento porcentual bruto es $s \cdot A$. Para encontrar el crecimiento porcentual neto, basta con restar la tasa agregada de depreciación del capital per cápita, $(\delta + n)$. El aumento neto es, pues, $s \cdot A - (\delta + n)$. Cuando el stock de capital es grande, las familias siguen ahorrando en la misma fracción de su renta. Cómo el producto marginal es constante (no hay rendimientos decrecientes del capital), cada unidad ahorrada sigue generando A unidades de producto y el aumento en el número de máquinas es $s \cdot A \cdot k$. Este aumento en el número de máquinas es mayor que cuando k era pequeño, pero cuando lo expresemos en términos porcentuales, el porcentaje sigue siendo el mismo, $s \cdot A$. Como la depreciación sigue siendo la misma, la tasa neta de crecimiento de la economía no varía.
     - En resumen, la tasa de crecimiento de la economía permanece constante a pesar de que el stock de capital aumente.
  4) En cuarto lugar, este modelo predice que no existe ningún tipo de relación entre la tasa de crecimiento de la economía y el nivel alcanzado por la renta nacional. Dicho de otro modo, *no predice convergencia*, ni condicional ni absoluta. Esto explica la atención que la literatura moderna sobre crecimiento ha prestado a la hipótesis de convergencia: se trata de uno de los rasgos que distinguen los nuevos modelos endógenos de los modelos neoclásicos tradicionales y, en consecuencia, es la forma de comprobar la validez empírica de los dos enfoques.
  5) En quinto lugar, el modelo AK predice que *los efectos de una recesión temporal serán permanentes*. Es decir, si el stock de capital disminuye temporalmente por una causa exógena (un terremoto, una tragedia natural o una guerra que destruya parte del stock de capital), la economía no va a crecer transitoriamente más deprisa para volver a la trayectoria de acumulación de capital anterior, sino que la tasa de crecimiento continuará siendo la misma, de modo que la pérdida sufrida se hará permanente.

6) Finalmente, un aspecto interesante de este modelo, apuntado inicialmente por SAINT-PAUL (1992), es que cuando la tecnología es AK, no puede haber demasiada inversión en el sentido de que *la economía no puede encontrarse en la zona dinámicamente ineficiente*. Para entender esto, recordemos que en la zona de ineficiencia dinámica, el tipo de interés en el estado estacionario era inferior a la tasa de crecimiento agregada. El tipo de interés, a su vez, es igual al producto marginal del capital menos la tasa de depreciación. Como en el modelo AK el producto marginal del capital es siempre constante, tenemos que el tipo de interés es siempre igual a $r^* = A - \delta$. Como a tasa de crecimiento per cápita es siempre igual a $\gamma_y{}^* = s \cdot A - (\delta + n)$, la tasa de crecimiento agregado es $\gamma_Y{}^* = s \cdot A - \delta$. Para que haya ineficiencia dinámica, es necesario que $A - \delta < s \cdot A - \delta$. Obsérvese que esta desigualdad no se puede dar nunca, puesto que la tasa de ahorro y siempre inferior a 1 y por lo tanto A es siempre mayor que $s \cdot A$. La economía con tecnología AK, pues, no puede ser dinámicamente ineficiente.

Valoración

- ¿Provee el modelo AK un enfoque atractivo para explicar el crecimiento sostenido? A pesar de que su simplicidad es una ventaja, el modelo cuenta con una serie de características que lo hacen menos atractivo:
  - *i.* Es de alguna manera un caso de *filo de la navaja*, que no satisface los supuestos de una función neoclásica de buen comportamiento; en particular, requiere que la función de producción sea linear en el stock de capital.
  - *ii.* En segundo lugar, supone que a medida que pasa el tiempo, la fracción de renta nacional acumulada por el capital aumentará hasta 1 (si no es igual a 1 desde el principio).
  - *iii.* Finalmente, la evidencia sugiere que el progreso técnico es un factor muy relevante para comprender el proceso de crecimiento económico. Un modelo de crecimiento económico sin progreso técnico no captura este aspecto clave del crecimiento económico.

- A pesar de esto, el modelo *AK* que acabamos de desarrollar es muy importante, pues constituye la base sobre la que se construyen muchos de los modelos de crecimiento endógeno, que incorporan habitualmente algún supuesto que hace que la tecnología relevante acabe tomando la forma *AK*. Como veremos en las secciones que siguen, la mayor parte de los modelos de crecimiento endógeno esconden, en algún parte, algún supuesto que hace que la tecnología relevante tome la forma *AK*.

1.2.2. Un modelo AK con gasto público productivo (BARRO, 1990)

Idea

- En este apartado estudiaremos los efectos que el gasto público y los impuestos necesarios para financiar dicho gasto tienen en la economía y, en particular, en el crecimiento económico.
  - Con este objetivo, compararemos los aspectos positivos de tener un gasto público elevado con los aspectos negativos que conlleva la financiación de dicho gasto a través de impuestos.
  - Para ello, deberemos trabajar bajo el supuesto de que el gasto público es deseable (si no, la conclusión será inmediata: lo mejor sería reducir el tamaño del gasto público a cero, ya que no genera beneficios y su financiación comporta pérdidas). En términos de nuestros modelos de crecimiento, una manera de que el gasto público sea deseable es *introducirlo como argumento en la función de producción*[18].

[18] En sentido amplio, la literatura ha considerado como gasto productivo el gasto en seguridad, justicia, defensa, sanidad, transporte y comunicaciones, infraestructura y los subsidios a la investigación y el desarrollo.

Modelo

Supuestos

- Aquí, seguiremos a BARRO (1990) y partiremos de los siguientes supuestos:
  - La producción de la economía es una función del stock de capital privado, K_t, y del flujo de bienes suministrados por el gobierno, G_t:
$$Y_t = A \cdot K_t{}^{\alpha} \cdot G_t{}^{1-\alpha}$$
  - Para financiar el gasto público, G_t, el gobierno impone un impuesto sobre la renta (o, lo que es lo mismo, sobre la producción). Para simplificar el análisis, consideraremos que el impuesto es proporcional y el tipo impositivo es constante en el tiempo. Este tipo impositivo será denotado con la letra τ. La renta disponible de los individuos es, pues:
$$Y_t^d = (1-\tau) \cdot Y_t = (1-\tau) \cdot \left(A \cdot K_t{}^{\alpha} \cdot G_t{}^{1-\alpha}\right)$$
    - La parte de la renta que "no es disponible", $\tau \cdot Y_t$, es la que se apropia el gobierno como recaudación impositiva.
    - Si denotamos con g minúscula el gasto público por persona, $g = G/L$, entonces la renta disponible por persona se puede escribir como:
$$y_t^d = (1-\tau) \cdot y_t = (1-\tau) \cdot \left(A \cdot k_t{}^{\alpha} \cdot g_t{}^{1-\alpha}\right)$$
  - Al igual que en el modelo de Solow-Swan, suponemos que los consumidores ahorran (e invierten) una fracción constante de la renta disponible. La ecuación fundamental de Solow-Swan nos dice que el aumento en el stock de capital es la diferencia entre el ahorro y la depreciación, por lo que en este modelo se puede escribir como:
$$\boxed{\dot{k}_t = s \cdot y_t^d - (\delta + n) \cdot k_t} = s \cdot (1-\tau) \cdot y_t - (\delta+n) \cdot k_t = s \cdot (1-\tau) \cdot \left(A \cdot k_t{}^{\alpha} \cdot g_t{}^{1-\alpha}\right) - (\delta+n) \cdot k_t$$

Desarrollo

- Dividiendo los dos lados de la expresión anterior por k_t obtenemos una expresión para la tasa de crecimiento del capital por persona:
$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{s \cdot (1-\tau) \cdot \left(A \cdot k_t{}^{\alpha} \cdot g_t{}^{1-\alpha}\right)}{k_t} - \frac{(\delta+n) \cdot k_t}{k_t} \Longrightarrow \boxed{\frac{\dot{k}_t}{k_t} = s \cdot (1-\tau) \cdot A \cdot \left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\alpha} - (\delta+n)}$$
  - Esta ecuación indica que la tasa de crecimiento depende *positivamente del gasto público, g_t y negativamente del tipo impositivo, τ*. Ahora bien, el impuesto y el gasto público no son independientes, dado que, para poder gastar, el gobierno debe recaudar. Para obtener la relación entre gasto e impuestos basta con utilizar la *restricción presupuestaria del gobierno*.
    - Los gobiernos, en la vida real, pueden pedir prestado (tener un déficit), por lo que no debe ser necesariamente cierto que el gasto sea siempre igual al ingreso. Lo que sí debe ser cierto es que, a largo plazo, lo que se pide prestado se debe devolver o, dicho de otro modo, a largo plazo debe ser cierto que, más o menos, los gastos públicos sean iguales a los ingresos impositivos [ver tema 3.A.39]. Como estamos interesados en el crecimiento a largo plazo, omitiremos aquí la posibilidad de mantener déficit.
    - La restricción del gobierno será $G_t = \tau \cdot Y_t$. Dividiendo en los dos lados por L_t para expresar la restricción en términos per cápita y utilizando la función de producción en términos per cápita, $y_t = A \cdot k_t{}^{\alpha} \cdot g_t{}^{1-\alpha}$, podemos reescribir la restricción presupuestaria del gobierno como:
$$\begin{aligned} & g_t = \tau \cdot \overbrace{\left(A \cdot k_t{}^{\alpha} \cdot g_t{}^{1-\alpha}\right)}^{y_t} \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow g_t / g_t{}^{1-\alpha} = \tau \cdot A \cdot k_t{}^{\alpha} \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow g_t{}^{\alpha} = \tau \cdot A \cdot k_t{}^{\alpha} \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow g_t = (\tau \cdot A \cdot k_t{}^{\alpha})^{1/\alpha} \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow \boxed{g_t = \tau^{1/\alpha} \cdot A^{1/\alpha} \cdot k_t} \end{aligned}$$

– Esta expresión se puede utilizar en nuestra *ecuación de la tasa de crecimiento del capital per cápita*:

$$\boxed{\gamma_k = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = s \cdot (1-\tau) \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - (\delta + n)}$$

- La tasa de crecimiento del capital depende de factores como tasas de ahorro, depreciación, crecimiento de la población y el nivel tecnológico. La novedad respecto a otros modelos de crecimiento es que ahora el crecimiento también depende del impuesto sobre la renta, τ. Como este impuesto es constante, la tasa de crecimiento del capital es constante.
- Si tomamos logaritmos y derivamos en la restricción presupuestaria del gobierno en términos per cápita, $g_t = \tau^{1/\alpha} \cdot A^{1/\alpha} \cdot k_t$, vemos que la tasa de crecimiento del gasto público es idéntica a la tasa de crecimiento del capital, $\gamma_g = \gamma_k$:

$$\underbrace{\frac{\dot{g}_t}{g_t}}_{\gamma_g} = \frac{1}{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\dot{\tau}}{\tau}}_{=0} + \frac{1}{\alpha} \cdot \underbrace{\frac{\dot{A}}{A}}_{=0} + \underbrace{\frac{\dot{k}_t}{k_t}}_{\gamma_k} \Longrightarrow \gamma_g = \gamma_k$$

- Si tomamos logaritmos y derivadas de la función de producción respecto al tiempo, obtenemos $\gamma_y = \alpha \cdot \gamma_k + (1-\alpha) \cdot \gamma_g \Longrightarrow \gamma_y = \gamma_k = \gamma_g$. Finalmente, como el consumo es proporcional al PIB per cápita $\gamma_c = \gamma_y$. En resumen:

$$\boxed{\gamma_c = \gamma_y = \gamma_k = \gamma_g = s \cdot (1-\tau) \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - (\delta + n)}$$

  - Las variables agregadas crecen todas a la misma tasa que las variables per cápita más la tasa de crecimiento de la población. Es decir,

$$\gamma_C = \gamma_Y = \gamma_K = \gamma_G = s \cdot (1-\tau) \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta$$

  - Vemos, pues, que en este modelo, todas las tasas de crecimiento son constantes en todo momento (i.e. no hay transición hacia el estado estacionario), propiedad que comparten con el modelo AK.
    - La explicación de esta similitud es que <u>este modelo es, en realidad, el modelo AK</u>. Esto se puede ver en que si partimos de la ecuación de producción per cápita y sustituimos haciendo uso de la restricción presupuestaria del gobierno obtenemos lo siguiente:

$$y_t = A \cdot k_t^{\alpha} \cdot \underbrace{\left(\tau^{1/\alpha} \cdot A^{1/\alpha} \cdot k_t\right)}_{g_t}^{1-\alpha} = \underbrace{\tau^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot A^{1/\alpha}}_{\bar{A}} \cdot k_t$$

    donde $\bar{A}$ es una constante. Es decir, una vez incorporada la restricción presupuestaria en la función de producción, esta se convierte en una función lineal en el capital, en una función AK.

▪ Vamos como la expresión que determina el crecimiento de las variables del modelo en términos per cápita es la siguiente:

$$\boxed{\gamma_c = \gamma_y = \gamma_k = \gamma_g = s \cdot (1-\tau) \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - (\delta + n)}$$

– La novedad que caracteriza la tasa de crecimiento de la economía cuando existen bienes públicos productivos financiados con impuestos sobre la renta es que el tipo impositivo afecta al crecimiento económico. Y lo hace de dos maneras distintas:

- En primer lugar, lo hace de manera negativa a través del término, $(1-\tau)$. Este término refleja el hecho de que los impuestos reducen la renta disponible y, con ello el ahorro y la inversión de la economía. Esto reduce el crecimiento de la economía.
- En segundo lugar, lo hace de manera positiva a través de término, $\tau^{(1-\alpha)/\alpha}$. Este término refleja el hecho de que un mayor tipo impositivo permite al gobierno proporcionar un mayor nivel de gasto público productivo, lo que aumenta la producción y la capacidad de ahorrar e invertir. Esto afecta la tasa de crecimiento de manera positiva.

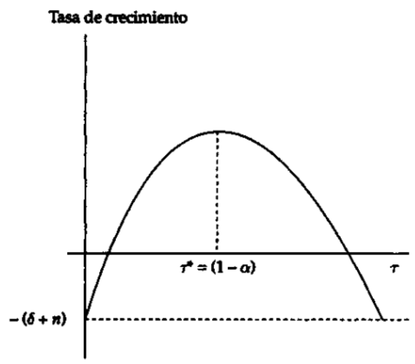
- El efecto agregado de un aumento en el tipo impositivo es ambiguo, dependiendo de si el efecto positivo domina al negativo o viceversa[19].
  - Para niveles bajos de tipo impositivo, aumentarlo tendrá efectos positivos sobre la tasa de crecimiento económico, puesto que dominarán los efectos del gasto público sobre la productividad del capital privado.
  - A medida que el tipo impositivo va aumentando, el efecto positivo se ve compensado por los efectos negativos que genera una mayor presión fiscal.
    - De hecho, existe un tamaño óptimo que puede calcularse derivando la ecuación respecto al tipo impositivo, lo que da lugar a que el valor óptimo del tipo impositivo que maximiza la tasa de crecimiento del PIB sea[20]:

$$\tau^* = (1-\alpha)$$

Lo cual coincide con su contribución en la función de producción.

- Podemos representar la relación existente entre τ y la tasa de crecimiento:

IMAGEN 3.– *Relación entre la tasa de crecimiento y el tipo impositivo*



Fuente: Sala i Martín, X. (1999). *Apuntes de crecimiento económico*. Antoni Bosch.

Implicaciones

- Este modelo implica que el sector público juega un papel importante en la tasa de crecimiento si el gasto público es productivo.
  - En sentido amplio, la literatura ha considerado como gasto productivo el gasto en seguridad, justicia, defensa, sanidad, transporte, comunicaciones, infraestructura, subsidios a la investigación y el desarrollo, etc.
  - Sin embargo, es necesario hacer algunas matizaciones:
    - Este gasto público adicional debe ser compaginado con reformas desde el lado de la oferta que permitan que los nuevos factores y tecnologías sean empleadas (p.ej. invertir en educación es menos rentable si existen rigideces considerables en el mercado de trabajo).
    - BAXTER y KING muestran que los efectos del gasto público se hacen visibles a largo plazo.
    - Hemos trabajado con tipo impositivo en general, pero no todos los impuestos tienen el mismo efecto sobre el crecimiento.

Valoración

-

[19] Si consideramos gasto público improductivo, sólo existiría el efecto negativo y el tamaño óptimo del sector público sería nulo.

[20] El cálculo por el que se llega a esta conclusión es el siguiente:

$$\gamma_c = \gamma_y = \gamma_k = \gamma_g = s \cdot (1-\tau) \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - (\delta + n)$$
$$\gamma_y = s \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - s \cdot \tau \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - (\delta + n)$$
$$\gamma_y = s \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} - s \cdot A^{1/\alpha} \cdot \tau^{1/\alpha} - (\delta + n)$$
$$\frac{\partial \gamma_y}{\partial \tau} = s \cdot A^{1/\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \tau^{(1-2\cdot\alpha)/\alpha} - s \cdot A^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s \cdot A^{1/\alpha} \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \tau^{(1-2\cdot\alpha)/\alpha} = s \cdot A^{1/\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \tau^{(1-\alpha)/\alpha} \Rightarrow (1-\alpha) \cdot \tau^{(1-2\cdot\alpha)/\alpha} = \tau^{(1-\alpha)/\alpha} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\tau^{(1-\alpha)/\alpha}}{\tau^{(1-2\cdot\alpha)/\alpha}} = (1-\alpha) \Rightarrow \tau^{[(1-\alpha)/\alpha]-[(1-2\cdot\alpha)/\alpha]} = (1-\alpha) \Rightarrow \boxed{\tau^* = (1-\alpha)}$$

1.2.3. Modelos de spillovers: Modelo de LUCAS (1988) de externalidades del capital

Se puede cantar el modelo de ROMER (1986) o el modelo de LUCAS (1988). Es importante conocer ambos, pero me quedaría con el de LUCAS.

Disclaimer: En puridad se puede considerar el modelo AK con gasto público de Barro (1990) como un modelo de spillovers en la medida que la inversión pública afecta a la productividad del capital.

Idea: Interpretación de ARROW (1962) *"learning by doing"* o "aprendizaje por la práctica"

- Tras acabar la Segunda Guerra Mundial, se constata en Estados Unidos un enorme aumento de la productividad asociado entre otros factores a la producción de bienes con un componente tecnológico importante (p.ej. aviones).
  - En este contexto, KENNETH ARROW analiza desde el punto de vista de la teoría económica el conocimiento. ARROW subraya que existe una discrepancia entre rendimiento privado y rendimiento social de la acumulación de capital. A medida que se acumula capital aumenta el stock de conocimientos de tal manera que puede haber efectos retroalimentación afectando a la productividad del capital (*"learning by doing"* o "aprendizaje por la práctica").
    - Esto implicará que se dé una externalidad y se produzca una acumulación inferior de lo socialmente deseable por ese efecto externo [ver tema 3.A.23].
- Estas ideas dan lugar en la teoría del crecimiento económico a las contribuciones de ROMER (1986)[21] y LUCAS (1988).
  - En esta exposición haremos referencia al modelo de LUCAS (1988).

Sala-i-Martin: capítulos 7 y 8

Ver Sala-i-Martin pág 56.

Modelo

Supuestos

- LUCAS (1988) parte de los mismos supuestos que los modelos que hemos visto hasta ahora, pero realiza una modificación a la función de producción:
  - LUCAS introduce la idea de *learning by doing* mediante una externalidad positiva en la función de producción (E_t^{η}):
$$Y_t = A_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha} \cdot E_t^{\eta}$$
donde E representa la externalidad, y el parámetro η (eta) representa la importancia de la externalidad (i.e. la elasticidad producto de la externalidad)[22].
    - En concreto, LUCAS supone que esa externalidad se refleja en el capital per cápita, de modo que podríamos escribir la función de producción de la siguiente manera:
$$Y_t = A_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha} \cdot k_t^{\eta}$$
    - Y en términos per cápita:
$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = \frac{A_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha} \cdot k_t^{\eta}}{L_t} = A_t \cdot \frac{K_t^{\alpha}}{L_t^{\alpha}} \cdot \frac{L_t^{1-\alpha}}{L_t^{1-\alpha}} \cdot k_t^{\eta}$$

[21] PAUL ROMER, en su tesis doctoral *"Increasing Returns and Long-Run Growth"* (1986), realiza una contribución seminal. El modelo es igual que el que exponemos de LUCAS (1988), pero ROMER considera que la externalidades el capital agregado de la economía (pues según ROMER, el stock acumulado es un buen índice de la experiencia acumulada). Por tanto, los aumentos de capital en una empresa producen aumentos en todas las empresas por los efectos desbordamiento.

$$Y_t = A_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha} \cdot E_t^{\eta} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \quad \text{PAUL ROMER (1986)}: \; Y_t = A_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha} \cdot K_t^{\eta} \\ \rightarrow \quad \text{ROBERT LUCAS (1988)}: \; Y_t = A_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha} \cdot k_t^{\eta} \end{array}$$

Mediante este modelo, ROMER llega a unas conclusiones parecidas a las de LUCAS pero con una diferencia: la tasa de crecimiento de la renta per cápita no sería constante sino que dependería de la población. Esto se conoce como *efecto escala* y hay quien lo justifica basándose en la "teoría de los genios" de KREMER, que defiende que cuanto mayor es la población, más posibilidades hay de que surja una mente privilegiada que genere una innovación disruptiva. Esta conclusión, sin embargo, no se ajusta a lo observado en la práctica.

[22] Nótese que si $E = 0$, tenemos la función de producción Cobb-Douglas.

$$y_t = A_t \cdot k_t^{\alpha} \cdot k_t^{\eta} \Longrightarrow \boxed{y_t = A_t \cdot k_t^{\alpha+\eta}}$$

Por tanto, el comportamiento de la economía dependerá de si la suma de las elasticidades-producto del capital y de la externalidad es menor, igual o mayor que la unidad.

Desarrollo

- Partiendo de la ecuación de producción per cápita se pueden dar tres casos:

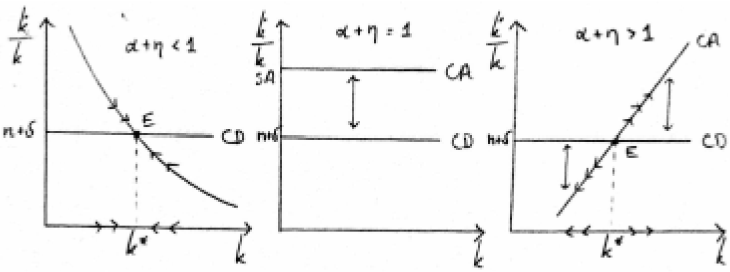
$$\boxed{y_t = A_t \cdot k_t^{\alpha+\eta}}$$

  – *Caso 1*: $\alpha + \eta < 1$
    - En este caso, existe una externalidad, pero ésta no es lo suficientemente grande para evitar que el capital (en sentido amplio, es decir, considerando su efecto directo sobre la producción y su efecto indirecto a través de la externalidad) siga mostrando rendimientos marginales decrecientes.
    - En estas circunstancias, el modelo es equivalente al de SOLOW, en el sentido de que existe un estado estacionario estable y se predice convergencia condicional.

  – *Caso 2*: $\alpha + \eta = 1$
    - En este caso, el capital en sentido amplio muestra rendimientos marginales constantes.
    - En estas circunstancias, el modelo es equivalente al modelo AK de REBELO, en el sentido de que no existe un estado estacionario. Es por ello que, en ocasiones, se considera el modelo AK como un caso particular del modelo de LUCAS.

  – *Caso 3*: $\alpha + \eta > 1$
    - En este caso, existe una externalidad lo suficientemente grande para conseguir que el capital en sentido amplio muestre rendimientos marginales crecientes.
    - En estas circunstancias, el modelo da lugar a un estado estacionario inestable. En esta situación, se producirá una aceleración del crecimiento económico (si la economía crece crecerá cada vez más rápido, si la economía se contrae también lo hará cada vez más rápido).

IMAGEN 4.– *Modelo de aprendizaje por la práctica LUCAS*



Fuente: Sahuquillo, A. (2017). 3A-43. https://www.alfonsosahuquillo.com/copia-de-3a-42

Implicaciones

- A nivel privado la función de producción presenta rendimientos decrecientes, pero a nivel social la función agregada de producción puede exhibir rendimientos crecientes en el capital, dando lugar a una aceleración en el crecimiento económico (las tasas de crecimiento económico aumentan).
  – Ello es por la *retroalimentación en la acumulación del capital*. La existencia de externalidades, si éstas son lo suficientemente grandes, permite que el capital en sentido amplio presente rendimientos marginales no decrecientes y permite que las variables per cápita crezcan a una tasa positiva sin necesidad de progreso técnico alguno.

- Este modelo arroja además importantes *implicaciones a nivel normativo*. En particular la *solución centralizada es distinta a la solución competitiva* porque los agentes no internalizan la externalidad y en presencia de este fallo de mercado no opera el Primer Teorema Fundamental de la Economía del

Bienestar [ver tema 3.A.22]. En consecuencia, a diferencia del modelo de SOLOW, el modelo de LUCAS predice que el sector público puede aumentar la tasa de crecimiento económico a largo plazo.

- El hecho de que existan externalidades implica que la empresa no puede capturar todos los efectos de su inversión en capital, por lo que habrá subinversión. Por lo tanto, para que se alcance el stock de capital óptimo, el gobierno puede:
  - Estimular la inversión vía desgravaciones, subsidios, etc.
  - Realizar inversión pública.

Valoración

▪

1.2.4. Modelo de UZAWA (1965) y LUCAS (1988): Acumulación de capital humano

Idea

▪ En contraposición a REBELO, UZAWA y LUCAS toman en consideración capital físico y capital humano por separado.
- Este modelo considera que el capital humano será de gran relevancia como motor del crecimiento económico endógeno.
  - Introduce el concepto de capital humano para explicar que es posible incrementar la capacidad productiva mediante inversiones directas en las personas.
  - En países desarrollados, la inversión más importante es la dirigida a la educación.

Modelo

Supuestos

▪ UZAWA (1965) parte de la observación de que aumentos en el stock de capital humano hacen más productivo el capital físico. De este modo, se produce una retroalimentación entre el capital físico y el capital humano, que da lugar a aumentos sostenidos en la renta per cápita.

▪ De este modo, parte de los siguientes supuestos:

1) Un único bien final, con función de producción con capital físico y capital humano:

$$Y_t = A_t \cdot K_t^{Y^\alpha} \cdot H_t^{Y^{1-\alpha}}$$

2) Dos sectores plenamente diferenciados, capital físico y capital humano, con diferentes procesos de acumulación:

   a. *Sector de producción del bien final*: Dentro de este sector, suponemos que el capital físico puede ser acumulado a partir de unidades de producción detraídas del consumo (como en otros modelos hasta ahora):

$$K_{t+1} = \left(1-\delta^K\right) \cdot K_t + s \cdot Y_t \Longrightarrow \dot{K}_t = s \cdot Y_t - \delta^K \cdot K_t \Longrightarrow \dot{K}_t = s \cdot A_t \cdot K_t^{Y^\alpha} \cdot H_t^{Y^{1-\alpha}} - \delta^K \cdot K_t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{K}_t = \left(A_t \cdot K_t^{Y^\alpha} \cdot H_t^{Y^{1-\alpha}}\right) - C - \delta^K \cdot K_t}$$

   b. *Sector de producción del capital humano*: El capital humano, en cambio, no puede ser acumulado a partir de unidades de producción detraídas del consumo, sino que se acumula con una tecnología específica que también va a utilizar capital físico.
   - δ^H puede interpretarse como el olvido de conocimientos con el tiempo o la imposibilidad de transferir todo el conocimiento de unas generaciones a otras.

$$\boxed{\dot{H}_t = B_t \cdot K_t^{H^\eta} \cdot H_t^{H^{1-\eta}} - \delta^H \cdot H_t}$$

- La literatura subraya que la educación es más intensiva en capital humano que la producción de bienes físicos, por lo que $1-\eta > 1-\alpha \Longrightarrow \eta < \alpha$. Es más, LUCAS, lleva este supuesto al extremo y considera que $\eta = 0$[23], por lo que:

$$\dot{H}_t = B_t \cdot H_t^H - \delta^H \cdot H_t$$

  - Por lo tanto, el capital físico sólo se usa en el sector de los bienes finales, mientras que el capital humano se usa en ambos y de manera rival: $H_t = H_t^Y + H_t^H$.
  - Denotamos como u la fracción de capital humano utilizada en la producción de bienes finales y $(1-u)$ la fracción del capital humano utilizado en la acumulación de conocimiento:

$$H_t^Y = u \cdot H_t \quad ; \quad H_t^H = (1-u) \cdot H_t$$

- Podemos definir las funciones de acumulación de capital físico y humano en términos per cápita:

$$\dot{K}_t = A_t \cdot {K_t}^{\alpha} \cdot (u \cdot H_t)^{1-\alpha} - C - \delta^K \cdot K_t \Longrightarrow \boxed{\dot{k}_t = A_t \cdot {k_t}^{\alpha} \cdot (u \cdot h_t)^{1-\alpha} - c - \left(\delta^K + n\right) \cdot k_t}$$

$$\dot{H}_t = B_t \cdot (1-u) \cdot H_t - \delta^H \cdot H_t \Longrightarrow \boxed{\dot{h}_t = B_t \cdot (1-u) \cdot h_t - \left(\delta^H + n\right) \cdot h_t}$$

3) Por el lado del consumo, suponemos que la tasa de ahorro no viene dada exógenamente, por lo que el agente ha de maximizar su utilidad.
   - Existen un número elevado de hogares idénticos, racionales y que viven infinitos períodos.
     - Son *idénticos*, lo que nos permite trabajar con agente representativo.
     - Son *racionales*, de modo que maximizan su función de utilidad que suponemos creciente, estrictamente cóncava, separable y aditiva teniendo como argumentos el consumo en los infinitos períodos.
       - Una forma funcional que satisface todo esto es la *función de utilidad isoelástica*.
     - *Viven infinitos períodos*, y suponemos que tienen perspectivas *forward-looking*, es decir, en su elección presente tiene en consideración el flujo de ingresos futuros hasta infinito. Además operan en un contexto de perfecta certidumbre (previsión perfecta). Consideramos la existencia de un factor de descuento que muestra impaciencia. ROBERT BARRO justifica trabajar con infinitos períodos interpretando el hogar como una dinastía de generaciones con motivaciones altruistas intergeneracionales.
     - Finalmente, suponemos que el número de hogares crece a una tasa exógena n.

Desarrollo

- Dado que no hay fallos de mercado, podemos trabajar con el **problema del planificador**, es decir, la maximización de la función de utilidad intertemporal sujeto a las restricciones de recursos agregados de la economía. Por lo tanto, el problema sería el siguiente:

$$\max_{\{c_t, u, k_t, h_t\}} \quad V = \int_0^{+\infty} e^{-(\rho - n)\cdot t} \cdot \frac{{c_t}^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

$$s.a. \quad \begin{cases} \dot{k}_t = A_t \cdot {k_t}^{\alpha} \cdot (u \cdot h_t)^{1-\alpha} - c - \left(\delta^K + n\right) \cdot k_t \\ \dot{h}_t = B_t \cdot (1-u) \cdot h_t - \left(\delta^H + n\right) \cdot h_t \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \lambda_t \cdot k_t = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \mu_t \cdot h_t = 0 \end{cases}$$

  - Nótese que las variables de control son la senda de consumos $\{c_t\}$ y la fracción del capital humano que se dedica a cada uno de los sectores, u.
  - Por su parte, las variables de estado son el stock de capital físico y el stock de capital humano.

[23] Este supuesto no hace sino atribuirle al sector educativo una tecnología AK camuflada, algo que resultará clave para las conclusiones que vamos a obtener en términos de crecimiento a largo plazo.

- El problema anterior, se puede resolver mediante la teoría del control óptimo, mediante la construcción del Hamiltoniano en valor presente:

$$\mathcal{H}^0 = e^{-(\rho-n)\cdot t} \cdot \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda_t \cdot \left[A_t \cdot k_t^{\alpha} \cdot (u \cdot h_t)^{1-\alpha} - c - \left(\delta^K + n\right) \cdot k_t\right] + \mu_t \cdot \left[B_t \cdot (1-u) \cdot h_t - \left(\delta^H + n\right) \cdot h_t\right]$$

donde λ_t y μ_t equivalen a *multiplicadores dinámicos*, y son los precios sombra del capital físico y humano, respetivamente. Es decir, representan lo que se incrementa la función objetivo (i.e. utilidad intertemporal) al variar marginalmente las restricciones (i.e. inversiones en capital humano y capital físico)[24].

  – Obtenemos las Condiciones de Primer Orden del Principio de Máximo de Pontryagin:

$$\text{C.P.O.:}$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial c_t} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial k_t} = -\dot{\lambda}_t \qquad \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial h_t} = -\dot{\mu}_t$$
$$\lim_{t \to +\infty} \lambda_t \cdot k_t = 0 \qquad \lim_{t \to +\infty} \mu_t \cdot h_t = 0$$

  – Tras una *complicada resolución algebraica*, y si además asumimos por simplicidad que $\delta = \delta^K = \delta^H$ (i.e. la depreciación del capital humano es igual a la depreciación del capital físico), se llegaría al siguiente resultado[25]:

$$\boxed{\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{h}_t}{h_t} = \frac{1}{\theta} \cdot \left(B - \delta - \rho\right)}$$

    ○ Es decir, el crecimiento a largo plazo de las variables per cápita será constante y dependerá positivamente de la tecnología del sector educativo (B) y negativamente de las preferencias de los consumidores por suavizar el consumo (θ), de la tasa de depreciación del capital (δ) y de la tasa de descuento de los consumidores (ρ).

Implicaciones

- El modelo de LUCAS (1988) nos permite llegar a las siguientes **conclusiones**:
  – La inclusión del capital humano y con tecnologías diferentes de producción físico y capital humano, permite cambiar las conclusiones del modelo de Solow.
    ○ *No se predice ningún tipo de convergencia* (el crecimiento económico no depende del capital inicial).
    ○ *La acumulación de capital humano puede dar lugar a crecimiento endógeno*. Todas las variables per cápita crecerán a una tasa *positiva* y *constante* si la capacidad que tiene la economía para *generar capital humano* (i.e. el sistema educativo), B, es lo suficientemente elevada.
      • En particular, se trata de un resultado similar al del modelo AK, pero sin necesidad de asumir que el capital físico y el capital humano se acumulan de la misma manera.
  – Finalmente, en relación a las *implicaciones de política económica*, las políticas que mejoren la capacidad de la economía para *acumular capital humano* (i.e. el sistema educativo), darán lugar a aumentos permanentes en la tasa de crecimiento de la renta per cápita. La evidencia empírica muestra que los países con mayor capital humano crecen más[26].

---

[24] Concretamente representan la contribución de las inversiones netas en t a la utilidad en cero (i.e. a la utilidad en valor actual descontado).

[25] *Dinámica del modelo*. Cabe recordar que los resultados a los que hemos llegado corresponden únicamente, al estado estacionario, en el que todas las variables de la economía crecen a tasas constantes. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en un modelo AK, la economía no se encuentra en dicho estado en todo momento, sino que existe un proceso de transición hacia el mismo. El estado estacionario de este modelo viene caracterizado por un punto en el que la relación entre capital físico y humano se mantiene constante, Así, en este modelo, los procesos de ajuste surgen debido a shocks que modifican dicha ratio óptima:
- Si en algún momento, la ratio k/h disminuye quedando por debajo de su nivel óptimo (p.ej. por un conflicto armado o por un terremoto que provoca una reducción de k), la tasa de crecimiento de la economía será superior a la del estado estacionario durante el período de ajuste (i.e. hasta que se llegue de nuevo a la ratio óptima).
- Si en algún momento, la ratio k/h aumenta, quedando por debajo de su nivel óptimo (p.ej. por una pandemia o por una fuga de cerebros que provoca una reducción de h), la tasa de crecimiento de la economía será inferior a la del estado estacionario durante el período de ajuste (i.e. hasta que se llegue de nuevo a la ratio óptima).

[26] Nótese que esta implicación de política económica se debe a que el input para producir capital humano es únicamente capital humano. Si asumiéramos que en la producción de capital humano también se necesita capital físico, entonces mejoras en la tecnología A también aumentarían de forma permanente la tasa de crecimiento de la renta per cápita.

Valoración

-

1.2.5. Modelo Sobelow (JONES y MANUELLI, 1990)

Idea

- Este modelo trata de superar la limitación del modelo AK de que *no hay convergencia condicional* proponiendo una productividad marginal que no es asintóticamente nula.
- De esta manera demuestra que la condición que permite generar *crecimiento endógeno* no son los rendimientos marginales no decrecientes del capital, sino el incumplimiento de la condición de Inada por la derecha. O dicho de otra manera: los rendimientos marginales no decrecientes del capital son una condición suficiente pero no necesaria para generar crecimiento endógeno.

Modelo

Supuestos

- Parten de los mismos supuestos que SOLOW y REBELO, pero cambian la forma de la función de producción.
  - De esta forma, JONES y MANUELLI proponen la siguiente función de producción[27]:

$$Y_t = A_t \cdot K_t + B_t \cdot {K_t}^{\alpha} \cdot {L_t}^{1-\alpha}$$

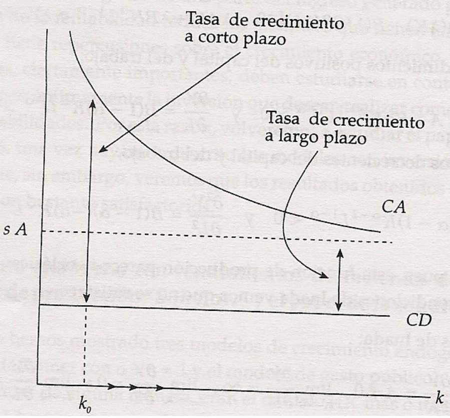
  - A medio camino entre la propuesta de SOLOW (1956) y la propuesta de REBELO (1991), está función se ha dado a conocer como función Sobelow.
  - Tiene rendimientos constantes a escala en K_t y L_t. ✓
  - La función de producción exhibe rendimientos marginales positivos pero decrecientes en los factores productivos K_t y L_t. ✓
  - Cumple las condiciones de Inada:
    - $F(K_t, L_t)$ es continuamente diferenciable. ✓
    - $F(K_t, L_t)$ es estrictamente creciente en K_t, L_t. ✓
    - $\lim_{K_t \to 0} F(K_t, L_t) = 0$ para todo L_t ○ $\lim_{L_t \to 0} F(K_t, L_t) = 0$ para todo K_t. ✓
    - $\lim_{K_t \to +\infty} F(K_t, L_t) = +\infty$ para todo L_t. ○ $\lim_{L_t \to +\infty} F(K_t, L_t) = +\infty$ para todo K_t. ✓
    - $\lim_{K_t \to 0} \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t} = +\infty$ para todo $L_t > 0$. ○ $\lim_{L_t \to 0} \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t} = +\infty$ para todo $K_t > 0$. ✓
    - $\lim_{K_t \to +\infty} \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t} = 0$ para todo $L_t > 0$. ○ $\lim_{L_t \to +\infty} \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L_t} = 0$ para todo $K_t > 0$. ×

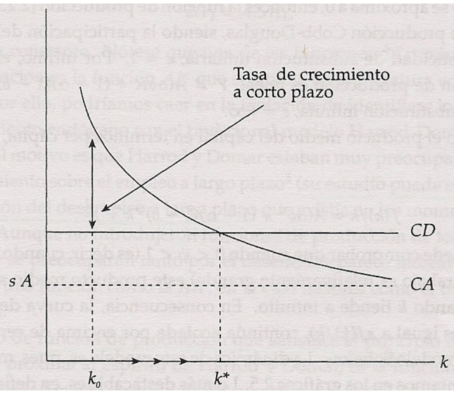
		SOLOW (Función neoclásica) e.g. $Y_t = A_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha}$	REBELO (Función AK) $Y_t = A_t \cdot K_t$	JONES y MANUELLI (Sobelow) $Y_t = A_t \cdot K_t + B_t \cdot K_t^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha}$
	Rendimientos constantes a escala	✔	✔	✔
Condiciones de INADA	Rendimientos decrecientes de los factores productivos	✔	✘	✔
Condiciones de INADA	El resto de las condiciones de INADA	✔	✘	✘

Desarrollo

-

[27] La función de producción fue inicialmente por KURZ (1968) y reintroducida en la literatura por JONES y MANUELLI (1990). Se conoce como modelo de Sobelow, por mezclar la función de producción utilizada por SOLOW (1956) con la función utilizada por REBELO (1991).





Implicaciones

-

Extensiones

- Una función de producción con un comportamiento semejante a la de Sobelow es la función de producción con elasticidad de sustitución constante (*CES*), dada por la siguiente expresión[28,29]:

$$Y = A \cdot \left(\alpha \cdot [b \cdot K]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \cdot [(1-b) \cdot L]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

en la cual A, α, b y φ son parámetros constantes. A denota la tecnología, α el peso de cada fator productivo en la función de producción y σ la elasticidad de sustitución entre el capital y el trabajo. Estos parámetros deben cumplir que $0 < \alpha < 1$, $0 < b < 1$ y $0 < \sigma < +\infty$.
  - En este caso, el producto medio del capital en términos per cápita, , viene dado por:

$$f(k)/k = A \cdot \left(\alpha \cdot b^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1-\alpha) \cdot (1-b)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \cdot k^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

---

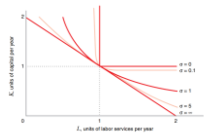
[28] Recordemos, del tema 3.A.11 que, la función de producción CES, se refiere a un tipo particular de función que combina dos o más tipos de factores de producción en una cantidad agregada. Esta función agregada exhibe una elasticidad de sustitución constante.

$$q = A \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot z_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

Dentro de este tipo de funciones de producción se encuentran algunas de las más utilizadas por la literatura (aquí especificadas para el caso de dos factores productivos):

- Si $\sigma = 0$ se trata de una función de producción de *coeficientes fijos* (o de *complementarios perfectos* o de tipo *Leontief*):
$$q = min\left\{ {}^{z_K}/_{a} ; {}^{z_L}/_{b} \right\}$$
- Si $\sigma = 1$ converge a una función de tipo *Cobb-Douglas*:
$$q = A \cdot z_K{}^{\alpha} \cdot z_L{}^{\beta} \; ; \; A, \alpha, \beta > 0$$
- Si $\sigma \rightarrow +\infty$ converge a una función de producción *linear* (o de *sustitutivos perfectos*):
$$q = a \cdot z_K + b \cdot z_L$$

Estas formas funcionales son muy utilizadas en la literatura económica, por ejemplo en ámbitos como el crecimiento económico.



[29] La función de producción de elasticidad de sustitución constante fue introducida por ROBERT SOLOW en su popular obra *"A contribution to the theory of economic growth"* (1956) [ver tema 3.A.43] y posteriormente popularizada por ARROW, CHENERY, MINHAS y SOLOW (1961).

– El lector puede comprobar que cuando $\sigma > 1$ (es decir, cuando la elasticidad de sustitución entre capital y trabajo es relativamente grande) este producto medio se aproxima a $A \cdot b \cdot \alpha^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$ cuando k tiende a infinito.
  - En consecuencia, la curva de ahorro (que es igual a $s \cdot f(k)/k$), continúa acotada por encima de cero, del mismo modo que en el modelo de Sobelow.
  - La dinámica de este modelo es, pues, muy semejante a la que representamos en dicho modelo.
  - Lo más destacable es, en definitiva, que las funciones de producción del tipo CES pueden generar tasas de crecimiento positivas a perpetuidad si la elasticidad de sustitución es lo suficientemente grande.

– De nuevo, la única diferencia que existe entre la función CES y la función de producción neoclásica de buen comportamiento es que cuando $\sigma > 1$, la función CES no satisface la condición de Inada de $\lim_{K_t \to +\infty} \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K_t} = 0$. En vez de esto, la productividad marginal del capital se aproxima a $A \cdot b \cdot \alpha^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}$, que es una constante positiva. Dicho de otro modo, la productividad marginal del capital efectivamente cae al aumentar k, pero no converge a cero.

IMAGEN 5.– *Modelo con función de producción CES ($\sigma > 1$)*

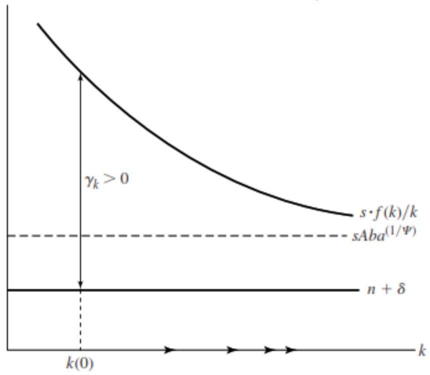


Figure 1.14
The CES model with $0 < \psi < 1$ and $sAb \cdot a^{1/\psi} > n + \delta$. If the CES technology exhibits a high elasticity of substitution ($0 < \psi < 1$), endogenous growth arises if the parameters satisfy the inequality $sAb \cdot a^{1/\psi} > n + \delta$. Along the transition, the growth rate of k diminishes.

Fuente: Barro, R. J. & Sala-i-Martin, X. (2004). *Economic growth* (2nd ed). MIT Press.

1.3. Valoración de los modelos de primera generación

- Con esto concluimos el análisis de la primera familia de modelos que se centran en la acumulación de capital físico y capital humano y que contemplan, de una u otra forma, la no existencia de rendimientos decrecientes (en el modelo de Sobelow, los rendimientos decrecientes existen, pero desaparecen de forma asintótica).
  – Estos modelos tienen en común el hecho de considerar que existen fenómenos derivados de la inversión en capital físico y humano (como las externalidades o los beneficios derivados de la educación) que ayudan a evitar que los rendimientos marginales decrezcan con el tiempo.

- Pero, como hemos visto, estos fenómenos no son el resultado de una actividad que específicamente busque dicho progreso tecnológico (salvo, quizá, en el modelo de capital humano), por lo que la pregunta que cabría plantearse es: ¿pueden estos impulsos derivados de la mera acumulación de capital prolongarse indefinidamente en el largo plazo?
  – La respuesta es que posiblemente no sea posible eludir los rendimientos decrecientes en el largo plazo, pues estos efectos terminarán agotándose a partir de cierto punto, siendo incapaces de sostener una tasa de crecimiento positiva en el largo plazo.
  – Para salvar esta traba surge una nueva familia de modelos.

2. MODELOS DE INNOVACIÓN TECNOLÓGICA (2ª GENERACIÓN): COMPETENCIA IMPERFECTA Y PROGRESO TECNOLÓGICO ENDÓGENO

2.1. Idea

- Como explicábamos en la introducción, había 2 maneras de superar la principal crítica del modelo de SOLOW y permitir que la renta per cápita creciese a una tasa de crecimiento sostenida sin necesidad de factores exógenos:
  a. *Asumir una función de producción no neoclásica*, que es lo que hemos explicado hasta ahora con los *modelos de acumulación de capital físico y humano*.
  b. *Asumir competencia imperfecta*, que es lo que haremos mediante los *modelos de innovación tecnológica*.
- En los años 90, las teorías del crecimiento endógeno derivan hacia modelos que recogen el hecho empíricamente contrastado de que las **empresas invierten con el objetivo concreto de favorecer el progreso tecnológico**, es decir, invierten en **investigación y desarrollo** (**I+D**), creando con ello un **motor de crecimiento a largo plazo**. Estos modelos son llamados modelos de crecimiento endógeno de 2ª generación. Este planteamiento contrasta:
  a) Por un lado, con el *enfoque neoclásico* [ver tema 3.A.43], que al admitir funciones de producción con rendimientos constantes a escala y mercados competitivos, eliminaba la posibilidad de financiar el desarrollo tecnológico por estar destinada la totalidad de las rentas obtenidas en el proceso productivo a la retribución de los factores (capital y trabajo).
  b) Por otro lado, el planteamiento también difiere del seguido por algunos *modelos de crecimiento endógeno vistos hasta ahora* (en particular, el modelo de externalidades), en los que el crecimiento endógeno aparecía como un subproducto de la inversión en capital y no como el resultado de una actividad específica de la empresa orientada al progreso técnico.
- En estos modelos, el **progreso técnico**, que se genera de forma **endógena**, es *motor de crecimiento*.
  – Al igual que en los modelos de 1ª generación se modifican los supuestos tecnológicos respecto al modelo de SOLOW y se obtiene como resultado crecimiento endógeno y sostenido.
  – Sin embargo, a diferencia de éstos, la acumulación de factores productivos no será un motor de crecimiento por sí mismo, sino que se necesita modelizar el progreso técnico, que además es endógeno.
    - Los modelos de 1ª generación dan lugar a crecimiento endógeno, entendido como que no hace falta especificar procesos exógenos, pero sin especificar una actividad endógena que dé lugar a progreso técnico.
    - Sin embargo, el crecimiento económico en los modelos de 2ª generación ya no será un subproducto, un efecto colateral de la acumulación de capital, sino que será resultado del progreso técnico, que vendrá modelizado de forma endógena al modelo.
      - Por tanto, el crecimiento económico es resultado de un proceso de asignación consciente de recursos a la investigación que eventualmente dará lugar a un mayor crecimiento económico.
- Existen **2 tipos de modelos de innovación tecnológica**:
  a) Aquellos para los que la innovación o progreso técnico toma la forma de *aumento en el número de variedades de bienes de capital disponibles* como factores de producción.
  b) Aquellos que consideran que el progreso técnico consiste en *mejorar la calidad de los productos existentes*, y que están, por tanto, relacionados con el concepto de *destrucción creativa* de SCHUMPETER[30]. Sin profundizar en ellos, diremos que estos modelos se basan en la creación de nuevos inventos que superan en calidad a los productos existentes, se apropian del mercado y obtienen rentas de monopolio hasta que son desplazados por productos mejores. Es la "guerra tecnológica" que observamos hoy en día, y que actúa como potente motor de progreso tecnológico.

[30] La aportación de SCHUMPETER se limita, no obstante, al concepto de *destrucción creativa*, y no al enfoque de crecimiento endógeno, ya que este autor entendía el fenómeno como esencialmente exógeno, sin proporcionar una explicación que justificara la actividad inventiva ni su difusión en la economía.

2.2. Modelos

2.2.1. Modelo con aumento del número de inputs (ROMER, 1990 / GROSSMAN y HELPMAN, 1991)

Idea

- PAUL ROMER[31] plantea un modelo en el que el progreso técnico es el resultado de una actividad intencionada y costosa que puede llevarse a cabo porque se da en un contexto de competencia imperfecta, esto es, en el que se generan excedentes apropiables gracias a un sistema de patentes, y que permiten retribuir la actividad de I+D[32].
- La innovación toma la forma de aumento en el número de variedades de capital disponibles como factores de producción.

Modelo

Supuestos

- El modelo de ROMER (1990) es un modelo de equilibrio general que parte de los siguientes supuestos:
  1. Existen 3 tipos de agentes:
     a. Productores de bienes finales;
     b. Inventores de bienes de capital; y
     c. Consumidores.
  2. La innovación o progreso técnico toma la forma de aumento en el número de variedades de bienes de capital disponibles como factores de producción.
     - Es decir, la diferencia para este modelo entre la producción agrícola de Estados Unidos y Senegal no es que Estados Unidos utilice más picos y más palas, sino que utiliza picos y palas pero, además, tractores, fertilizantes, etc.
     - La innovación tecnológica tiene características de bien público: es no rival y no excluible (al menos no en sentido estricto). De ahí que resulte necesaria la intervención del sector público mediante un sistema de patentes que haga que el bien público sea excluible.
  3. Las empresas de bienes de capital (i.e. bienes intermedios) operan con una función de producción que presenta rendimientos crecientes a escala, por lo que será necesario asumir que operan en un marco de competencia imperfecta.
     - Los rendimientos crecientes a escala implican, necesariamente, economías de escala, esto es, un coste marginal inferior al coste medio, por lo que si las empresas funcionan en competencia perfecta (i.e. $P = CMg$) obtendrán pérdidas. De ahí que sea necesario que tengan cierto poder de mercado para elevar el precio por encima de su coste marginal.
       - Las economías de escala tienen sentido en el sector de bienes intermedios: la I+D es una actividad con elevados costes fijos, pero con costes marginales muy bajos (pues una vez creada la idea, su reproducción es casi gratuita), lo que provoca que $CMg < CMe$.
     - Este poder de mercado lo logran gracias a unas barreras de entrada creadas por el sector público con el sistema de patentes. Sin él, las empresas no podrían apropiarse de los beneficios de sus invenciones, y no habría producción a largo plazo[33].

[31] PAUL ROMER fue galardonado con el Premio Nobel de Economía en 2018 "Por integrar las innovaciones tecnológicas en el análisis macroeconómico de largo plazo".

[32] https://youtu.be/papAGxhruVk – Por qué las PATENTES son un GRAN PROBLEMA económico - VisualEconomik

[33] El historiador económico y Premio Nobel de Economía DOUGLASS NORTH afirma que la Revolución Industrial no tuvo lugar hasta que Inglaterra fijó un sistema de garantías de los derechos intelectuales de los inventores (s. XVIII).

DOUGLASS NORTH fue galardonado con el Premio Nobel de Economía en 1993 junto con ROBERT FOGEL «Por renovar la investigación de la historia económica, aplicando teorías y métodos para explicar los cambios tanto económicos como institucionales».

Desarrollo

Solución descentralizada

- Existen 3 tipos de agentes en la economía:
  a. **Productores de bienes finales**:
  - Los productores de bienes finales operan en un entorno de **competencia perfecta**, con una función de producción neoclásica:

$$Y_t = A_t \cdot \underbrace{K_t^{\alpha}}_{=\sum_{j=1}^{n} x_{jt}^{\alpha}} \cdot L_t^{1-\alpha} \Longrightarrow Y_t = A_t \cdot \sum_{j=1}^{n} x_{jt}^{\alpha} \cdot L_t^{1-\alpha}$$

    donde n es la cantidad de bienes intermedios existentes y x_j es la cantidad utilizada para cada uno de los inputs de capital.
  - La empresa de bienes finales buscará maximizar sus beneficios. Así, su problema será el siguiente:

$$\max_{\{x_{jt}, L_t\}} \quad \Pi_{B.\,finales} = \int_0^{+\infty} e^{-r\cdot t} \cdot \left(\underbrace{P_t}_{=1} \cdot Y_t - W_t \cdot L_t - \sum_{j=1}^{n} P_{jt} \cdot x_{jt} \right) dt$$

    - Se podría plantear el Hamiltoniano y derivar las Condiciones de Primer Orden aplicando el Principio del Máximo de PONTRYAGIN. Sin embargo, en ausencia de costes de ajuste, la resolución de este problema es equivalente a la maximización de beneficios en cada momento t [ver tema 3.A.29].
  - De las Condiciones de Primer Orden, se derivan la demanda de trabajo y las demandas de bienes intermedios:

$$W = PMg_L$$
$$P_j = PMg_{x_j}$$

    - La empresa productora de bienes contratará trabajo hasta el punto en que el valor de su productividad marginal se iguale al salario.
    - La empresa productora de bienes finales contratará un bien intermedio hasta que el valor de su productividad marginal se iguale a su precio.
      - En particular, la cantidad demandada del bien intermedio j depende negativamente del precio de esa variedad y positivamente de la eficiencia de la tecnología y del tamaño de la población.

  b. **Productores de bienes de capital intermedios** (i.e. empresas de I+D):
  - Los productores de bienes intermedios invierten recursos en I+D para fabricar variedades de bienes intermedios, que utilizarán los productores de bienes finales como factores productivos.
    - La innovación tiene carácter de bien público (no rival y no excluible), por lo que se daría el problema del *free rider* y se produciría una infraprovisión de la innovación [ver tema 3.A.23].
    - Para evitar este problema e incentivar la inversión en I+D, cada vez que una empresa descubre un nuevo producto, se le confiere por ley un *monopolio perpetuo* sobre el producto inventado (gracias a un *sistema de patentes*).
    - En consecuencia, las empresas productoras de bienes intermedios operan, a diferencia de las de bienes finales, en un **contexto de competencia imperfecta**.
  - De este modo la empresa productora de bienes intermedios se enfrenta a 2 decisiones:
    a) *Invertir o no invertir en la creación de un nuevo producto*. En caso de invertir incurrirán en un coste fijo (ϕ –phi–)[34].
    b) *A qué precio vender la variedad producida* (P_j).

[34] Algunos economistas asumen que ϕ será decreciente respecto a n bajo la creencia de que los inventos del pasado facilitan los nuevos inventos, de manera que se reduce el coste de éstos. Otros asumen que ϕ es creciente respecto a n, pues cuantas más cosas se hayan inventado ya, más difícil resultará inventar nuevos productos. Dado que ambos argumentos pueden parecer válidos, aquí supondremos que ϕ es constante.

- Dicha problemática se puede considerar como un juego secuencial de dos etapas y se puede resolver por inducción hacia atrás [ver tema 3.A.19]:
  - *b) <u>Precio de venta de una variedad de bienes de capital</u>*:

$$\max_{\{P_{jt}\}} \quad Ingresos_{B.\ intermedio\ j} = \int_0^{+\infty} e^{-r\cdot t} \cdot \left[\left(P_{jt} - CMg_{jt}\right) \cdot x_{jt}\right] dt$$

    - Resolviendo se puede obtener que el precio monopolístico óptimo será un *mark-up* sobre el coste marginal, permitiendo así que los inventores recuperen sus costes fijos.
      $\rightarrow$ Este *mark-up* será posible, como decíamos, gracias a un sistema de patentes.
    - Una vez calculado el precio óptimo, podemos sustituir y calcular la cantidad óptima lanzada al mercado de cada bien intermedio y el beneficio de las empresas que invierten en I+D.
  - *a) <u>Invertir o no en la invención del bien de capital</u>*:
    - Para decidir si es rentable la fabricación de un bien intermedio, la empresa comparará el coste fijo de la invención (digamos, ϕ, que supondremos constante) con el valor actual descontado de los ingresos.
    - La empresa destinará nuevos recursos a I+D y fabricará nuevos bienes intermedios hasta el momento en que el valor actual descontado de los beneficios del nuevo bien intermedio se igualen a los costes fijos derivados de la inversión en I+D, ϕ.

c. **<u>Consumidores</u>**:

- Su problema es equivalente al del modelo de RAMSEY-CASS-KOOPMANS:

$$\max_{\{c_t, b_t\}} \quad V = \int_0^{+\infty} e^{-(\rho-n)\cdot t} \cdot \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt$$

$$s.a. \quad \begin{cases} \dot{b}_t = W_t + b_t \cdot (r_t - n) - c_t \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \lambda_t \cdot b_t = 0 \end{cases}$$

  - Resolviendo se obtiene la ecuación de KEYNES-RAMSEY:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \underbrace{1/\theta}_{ESI} \cdot \left(r_t - \rho\right)$$

    - Es decir, que la tasa de crecimiento del consumo per cápita será positiva cuando el tipo de interés de equilibrio, r_t, sea mayor que la tasa de descuento, ρ.
    - Además, la magnitud de la tasa de crecimiento dependerá de la Elasticidad de Sustitución Intertemporal.

- Combinando los problemas de los 3 agentes de la economía, llegamos a una solución de equilibrio general, que da lugar a que el crecimiento de la economía en estado estacionario dependa de:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = f\left(\theta - \mid \rho - \mid \phi - \mid A + \mid L +\right)$$

  – Negativamente de la preferencia por la suavización del consumo de los individuos, θ (i.e. positivamente de la ESI, σ).

  – Negativamente de la impaciencia, ρ, es decir, cuanto mayor sea la impaciencia de los consumidores, menor será el crecimiento en estado estacionario.
    - Es decir, cuanto menores sean estos dos parámetros, menor será la voluntad de los individuos a destinar recursos al ahorro y la inversión, por lo que menor será la innovación y el crecimiento en estado estacionario.

  – Negativamente de los costes fijos de la innovación, ϕ, ya que estos desincentivan la innovación.

  – Positivamente de la tecnología del bien final, A, ya que hace que los bienes finales se produzcan más eficientemente.

- Positivamente de L, ya que genera un mayor tamaño de mercado y un efecto escala como en el modelo de *spillovers* de ROMER (1986) [ver nota al pie 21].
  - Esto se debe a que al ser la tecnología un bien no rival, cuanto mayor sea L menor será el coste de una invención per cápita. Hemos supuesto crecimiento de la población dado, por eso a la versión de ROMER se le denomina de crecimiento "semi-endógeno", porque supone una fuente de crecimiento exógena (la población).

▪ Por lo tanto, la tasa de crecimiento de la renta per cápita será sostenida y puede ser positiva a largo plazo. El supuesto clave que permite este crecimiento sostenido es la introducción de productores de I+D en competencia imperfecta (esto indica la importancia de la protección de los derechos de propiedad para evitar el problema del *free rider*).

Solución del planificador

▪ Por otra parte, habría que valorar la Pareto-optimalidad del resultado obtenido en una economía descentralizada con sistema de patentes, con el fin de compararlo con el que se obtendría con un problema paralelo en que existiera un planificador benevolente omnipotente de la economía que sustituyera al mercado.
  - En tal caso, el problema de planificador sería el de la maximización de la función de utilidad de los consumidores bajo una restricción de recursos de toda la economía.
  - Si resolvemos este problema, llegamos a que el nivel de producción de bienes intermedios sería superior al que lográbamos antes con la solución descentralizada con patentes.
    - Esto es así, porque en la economía descentralizada, ponía a los bienes intermedios un precio superior al coste marginal para poder cubrir los costes de la actividad investigadora, y por tanto, la cantidad demandada de dichos bienes resulta necesariamente menor a la óptima.
    - En definitiva, la solución descentralizada con patentes no es óptima desde el punto de vista de Pareto: el nivel de producción en el mercado de bienes de capital y la tasa de crecimiento de la economía son inferiores a los óptimos.

▪ ¿Qué puede hacer entonces un gobierno para favorecer el crecimiento de la economía a largo plazo?
  - *Subsidios a la I+D no resuelven el problema*. El problema es la adquisición de bienes intermedios a precios supracompetitivos. Persiste la distorsión en el mercado de bienes intermedios.
  - Alternativamente, una política pública de *subsidio a la adquisición de bienes de capital* sí lograría corregir la distorsión en dicho mercado ya que permitiría que los productores de bienes finales pudieran adquirir bienes intermedios a precios competitivos. Con ello se lograría que la cantidad demandada de los mismos fuera la óptima y se maximizaría el crecimiento económico. El problema sería la financiación con impuestos distorsionantes.

Implicaciones

▪ Este modelo arroja las siguientes **implicaciones de política económica**:
  - Existen una serie de *políticas e instituciones pro-crecimiento que incentivan la innovación* (p.ej. instituciones que reduzcan la incertidumbre, seguridad jurídica, derechos de propiedad, sistemas impositivos de fácil comprehensión…).
  - En relación a los *efectos de la apertura comercial*:
    - Efecto escala ($\uparrow L$), el tamaño del mercado aumenta a raíz de la apertura al comercio. Esto llevará a que las empresas de bienes finales aumenten la demanda de bienes intermedios, incrementando los beneficios de las empresas productoras de bienes intermedios, lo que aumentará la tasa de crecimiento económico.
    - Además, al demandar las empresas de bienes finales más bienes intermedios (x_j) podrían generarse externalidades (tanto de aprendizaje por la práctica como de desbordamiento del conocimiento) en empresas de bienes intermedios. Estas podrían hacer que aumente el beneficio de las empresas de bienes intermedios y de nuevo afectando positivamente al

crecimiento económico. ¡Ojo! Este punto no se observa en nuestro modelo, pero como hemos mencionado, el propio ROMER tiene un modelo de 1986 de externalidades de capital que predeciría estos efectos.

- Por último, el comercio internacional podría servir como vehículo para la transmisión del conocimiento tecnológico que disminuya los costes fijos de la inversión inicial en I+D (p.ej. mayor coordinación entre los investigadores a nivel internacional, evitando así duplicidades en la actividad investigadora). Para esto, tendríamos que suponer que ϕ es decreciente respecto a n (y no constante como hemos supuesto hasta ahora [vid nota al pie 34])[35].

Extensiones (modelo de GROSSMAN y HELPMAN, 1991)

- GROSSMAN y HELPMAN (1991) parten de una idea similar a la de ROMER (1990), en el sentido de que la innovación es un motor de crecimiento y viene dada por el diseño de nuevas variedades de bienes intermedios.
  – Sin embargo, GROSSMAN y HELPMAN pretenden matizar implicaciones de política económica favorables a la apertura comercial.
- Dado que en este modelo, el **causante último del crecimiento económico sostenido a largo plazo es la I+D**, la manera en que el **comercio internacional** puede influir en el crecimiento es a través del **coste relativo de la I+D**.
  – Así, *si el país es exportador de bienes intensivos en I+D e importador de bienes intensivos en trabajo* (p.ej. Estados Unidos), un arancel sobre el bien importado aumentará el precio relativo del factor trabajo[36] y disminuirá el de la I+D, por lo que los productores nacionales tendrán más incentivos a utilizar I+D *aumentando el crecimiento a largo plazo*.
  – Por el contrario, *si el país es exportador de bienes intensivos en trabajo e importador de bienes intensivos en I+D* (p.ej. países en vías de desarrollo), un arancel sobre el bien importado aumentaría el precio relativo de la I+D, por lo que los productores nacionales tendrían menos incentivos a utilizar I+D *disminuyendo el crecimiento a largo plazo*.
- Por lo tanto, la idea de este modelo es llevar a cabo una **política comercial estratégica que disminuya el coste relativo de la I+D**:
  – *Si el país es exportador de bienes intensivos en I+D*, habría que llevar a cabo una *política proteccionista* (a través, por ejemplo, de aranceles).
  – *Si el país es importador de bienes intensivos en I+D*, habría que llevar a cabo una *liberalización comercial* (o, incluso, subvencionar las importaciones, como llegan a sugerir los autores).

Valoración

-

2.2.2. *Modelo schumpeteriano de innovación tecnológica y variedad de productos (PHILIPPE AGHION y PETER HOWITT, 1992)*

Sala-i-Martin: capítulo 9

https://dash.harvard.edu/bitstream/handle/1/12490578/A%20Model%20of%20Growth%20through%20Creative%20Destruction.pdf

Destrucción creativa

https://www.youtube.com/watch?v=OtSndWOvWik – Schumpeter te explica… la destrucción creadora (Óscar Vara)

[35] Otra razón por la que la apertura comercial es beneficiosa: al aumentar el valor presente de los beneficios de las empresas de bienes intermedios, la inversión en empresas intermedias será más rentable, por lo que hay más incentivos para ahorrar por parte de los consumidores, lo que impactaría de forma positiva de sobre la tasa de crecimiento de la economía.

[36] El Teorema de STOLPER-SAMUELSON nos dice que el aumento del precio de un bien aumenta la remuneración del factor en que es intensivo dicho bien (y, por tanto, el precio del factor) [ver tema 3.B.5].

Idea

- Otra concepción de progreso tecnológico distinta a la obtención de nuevas variedades, considera que el progreso tecnológico consiste en **mejorar la calidad de los productos/variedades existentes**. (p.ej. el paso de carruajes a coches).
  - Existe una amplia variedad de modelos, aquí veremos el modelo de AGHION y HOWITT (1992).
- AGHION y HOWITT recogen las ideas de SCHUMPETER relacionadas con el concepto de **destrucción creativa**, según el cual *se concibe a la economía como un sistema en constante evolución donde nuevos inventos superan en calidad a productos existentes que devienen obsoletos*. De este modo, los nuevos innovadores se apropian del mercado y obtienen rentas de monopolio hasta que son desplazados por productos mejores.
  - AGHION y HOWITT demuestran como el *proceso de destrucción creativa* actúa como motor del crecimiento económico a largo plazo.
  - La importancia de este enfoque está en que *se explicitan los factores que determinan la innovación y surgen ganadores y perdedores*.

Modelo

Supuestos

- En la economía existen **2 agentes**: consumidores y empresas.
  - Los **consumidores** distribuyen el gasto temporalmente: gastan en cada período en la variedad de mejor calidad aunque también se fijan en el precio.
    - Por tanto, deciden en función de la calidad y el precio de un producto.
  - Cada **empresa** produce una determinada variedad tratando de producir la mejor calidad del mercado.
    - Se modelizan en el marco de DIXIT y STIGLITZ (1977) [ver tema 3.A.18], pero en este caso cada variedad producida no es idéntica como en el modelo original.
    - Demandan trabajo para invertir tanto en la producción de bienes como en la de I+D (invierten el I+D para aumentar la probabilidad de éxito).
    - La empresa que tiene éxito copa toda la demanda hasta que aparece otra superior.
    - La probabilidad de mejorar la calidad depende de la distancia de su tecnología con la frontera tecnológica.
    - Los beneficios que se obtienen son menores que en los modelos de variedades (nuevos avances eliminan el monopolio anterior). Aumento grado de competencia en el mercado.

Desarrollo

-

Implicaciones

- Como resultado, el proceso de destrucción creativa actúa como motor del crecimiento económico a largo plazo y permite lograr un crecimiento sostenido.
- Además, el modelo arroja las siguientes **implicaciones de política económica**:
  - Al igual que en el modelo de ROMER (1990), existen *políticas e instituciones pro-crecimiento consistentes en incentivar la innovación* (p.ej. instituciones que reduzcan la incertidumbre, seguridad jurídica, derechos de propiedad, sistemas impositivos de fácil comprehensión…).
  - *Política de defensa de la competencia funcional*. Conflicto entre las empresas que han innovado y las empresas que se han quedado atrás. Se puede hablar de economía política del crecimiento económico. Los incumbentes pueden tratar de ejercer presión para prevenir la entrada de los entrantes (barreras de entrada, políticas anticompetitivas, ejercer lobby a los gobiernos, abuso de posición de dominio…). La política de defensa de la competencia trataría de prever dichos comportamientos. No obstante, surge un *trade-off* que hay que ponderar: hay que garantizar

rentas para incentivar la innovación (*ex-ante*) pero hay que tener en cuenta que los incumbentes-consolidando su posición de dominio y ejerciendo prácticas anticompetitivas pueden dañar la innovación (*ex-post*).
- *Investigar financiación de campañas políticas*: disminuir capacidad de lobby.

Evidencia empírica

- Cierto respaldo empírico: en la década de 1980 ciertos shocks macroeconómicos (que provocan *destrucción creativa*) tuvieron efectos a largo plazo.
- Se puede crecer con **innovación** o **imitación**.
  - Solo la innovación garantiza crecimiento sostenido en el largo plazo. Japón (*economie du rattrapage* – desarrollo de instituciones que favorecen la imitación de tecnologías, favorecen poca movilidad laboral – cuando se acaba el proceso de catch-up se llega a una trampa del crecimiento.
  - *Middle-income trap*. Muchos países no tienen recursos ni para innovar ni para imitar, algo que puede explicar ausencia de convergencia.

Extensiones

Un solo sector

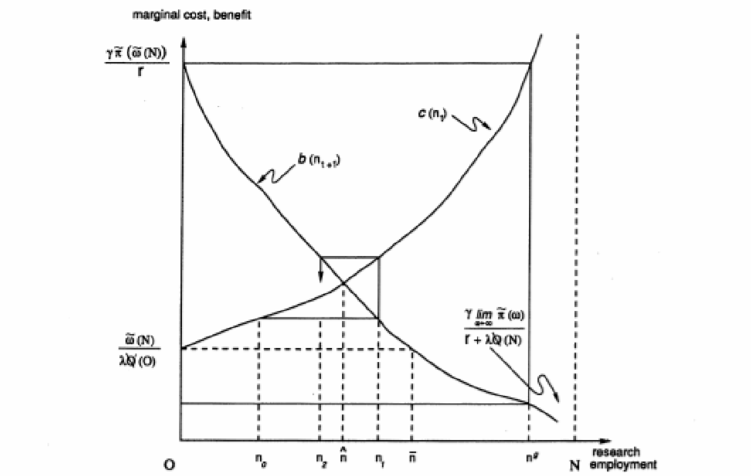


FIGURE 1.—The effect of future research on current research: $n_0 = \psi(n_1)$ and $n_1 = \psi(n_2)$. The pair $(0, n^g)$ constitutes a no-growth trap.

Varios sectores

Modelo schumpeteriano con recursos agotables

Valoración

2.3. Valoración de los modelos de segunda generación

CONCLUSIÓN

- ***Recapitulación (Ideas clave)***:
  - Los **modelos neoclásicos** suponen un primer análisis dentro de la teoría del crecimiento económico. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, habida cuenta del crecimiento sostenido de algunos países se vio necesario relajar el supuesto de rendimientos decrecientes del capital y, por otro lado, endogeneizar el progreso tecnológico.
  - De esta manera, los **modelos de crecimiento endógeno** permiten:
    - *Explicar el crecimiento sostenido de la renta per cápita sin recurrir a progreso técnico exógeno*. Es decir, al contrario de lo que nos indicaban las teorías neoclásicas, ahora vemos que el crecimiento económico está en manos de los agentes económicos.

- Además, pueden justificar *fenómenos de path dependency*, es decir, que, en la medida en que *no existe un estado estacionario*, el punto del que partan las economías puede ser fundamental a la hora de explicar su nivel de renta actual.
- En la medida en que muchos de estos modelos se formulan en contextos con imperfecciones (externalidades, competencia imperfecta, etc.), hay margen de *intervención para el sector público* que puede intervenir y modificar las acciones de los agentes para aumentar el crecimiento económico a largo plazo.
  - Por ejemplo, el Estado puede asumir un papel relativamente más activo fomentando la innovación. Sin embargo, el debate es más profundo porque entraríamos en el campo de la política industrial y la conveniencia no solo si el sector público debe ocupar un papel más activo e invertir más en I+D, pero también si la política industrial debe ser horizontal o sectorial.
  - Otras políticas coherentes con las que hemos visto en los modelos de esta exposición sería la inversión en educación o la protección de los derechos de propiedad. Por tanto, la vertiente institucional también es fundamental.

– Estos modelos presentan **algunas conclusiones no acordes con la evidencia empírica**, entre las que destacan:
- No predicen convergencia condicional (salvo el modelo de Sobelow).
- Algunos predicen que el nivel de la población afecta a la tasa de crecimiento a largo plazo de las variables per cápita.

▪ ***Relevancia***:

–

▪ ***Extensiones y relación con otras partes del temario***:

– Por otro lado, los modelos que hemos abordado se centran en la acumulación de capital y en la tecnología (*causas próximas del crecimiento*). ¿Por qué se producen las decisiones de acumulación de capital o las decisiones de innovación? Para ello es necesario centrarse en las causas últimas del crecimiento económico. Por ello, una rama complementaria dentro de la teoría del crecimiento económico trata de identificar como la calidad de las instituciones pueden proporcionar una causalidad para explicar el crecimiento económico. En este sentido destaca la contribución de ACEMOĞLU, JOHNSON y ROBINSON.

▪ ***Opinión***:

–

▪ ***Idea final (Salida o cierre)***:

– En definitiva, quería concluir enfatizando importancia políticas orientadas al crecimiento económico a largo plazo, por el efecto compuesto que puede tener un mayor crecimiento a lo largo de los años. Parafraseando a ROBERT LUCAS, la eficacia marginal de una política orientada al crecimiento económico a largo plazo es mucho mayor que la de una política orientada a contrarrestar el ciclo económico.

The Outlook for Long-Term Economic Growth

Charles I. Jones

WORKING PAPER 31648 DOI 10.3386/w31648 ISSUE DATE August 2023

What are the prospects for economic growth in the United States and other advanced countries over the next several decades? U.S. growth for the past 150 years has been surprisingly stable at 2% per year. Growth theory reveals that in the long run, growth in living standards is determined by growth in the worldwide number of people searching for ideas. At the same time, a growth accounting exercise for the United States since the 1950s suggests that many other factors have temporarily contributed to growth, including rising educational attainment and a rising investment rate in ideas. But these forces are inherently temporary, implying that growth rates could slow in the future. This prediction is reinforced by declining population growth throughout the world. In contrast, other forces could potentially sustain or even increase growth. The emergence of countries such as China and India provides large numbers of people who could search for ideas. Improvements in the allocation of talent --- for example, the rise of women inventors --- and increased automation through artificial intelligence are other potential tailwinds.

https://t.co/S7U5PS6uDy

Bibliografía

Sala i Martín, X. (1999). *Apuntes de crecimiento económico*. Antoni Bosch. Capítulo 2.

Acemoğlu, D. (2009). *Introduction to modern economic growth*. Princeton University Press. Chapters 10-15

Tema Juan Luis Cordero Tarifa

https://www.youtube.com/playlist?list=PLxSnKD5fMpRYdG9o8Wr_mNETiO9b9D_jG

https://www.youtube.com/playlist?list=PLxSnKD5fMpRahbkkza1hcVN3kvwFB9acX

Preguntas de otros exámenes

–

Enlace a preguntas tipo test

https://www.quia.com/quiz/6562923.html

Anexos

A.1. *Anexo 1*: De causas próximas a causas últimas (ACEMOĞLU, 2009, págs. 19 y ss.)

- Los correlatos del crecimiento económico, como el capital físico, el capital humano y la tecnología, son nuestro primer tema de estudio. Pero estas son solo causas próximas del crecimiento económico y el éxito económico. No sería del todo satisfactorio explicar el proceso de crecimiento económico y las diferencias entre países con la tecnología, el capital físico y el capital humano, ya que presumiblemente hay razones por las que la tecnología, el capital físico y el capital humano difieren entre los países. Si estos factores son tan importantes para generar diferencias de ingresos entre países y causar el despegue hacia el crecimiento económico moderno, ¿por qué ciertas sociedades no mejoran sus tecnologías, invierten más en capital físico y acumulan más capital humano?
- Corea del Sur y Singapur han crecido rápidamente en los últimos 50 años, mientras que Nigeria no lo ha hecho. Podemos tratar de explicar los resultados exitosos de Corea del Sur y Singapur observando las *causas próximas* del crecimiento económico. Podemos concluir, como muchos lo han hecho, que la rápida acumulación de capital ha sido una causa importante de estos milagros de crecimiento y debatir los roles relativos del capital humano y la tecnología. Podemos simplemente culpar del fracaso de Nigeria para crecer a su incapacidad para acumular capital y mejorar su tecnología. Estas perspectivas son, sin duda, de utilidad para comprender la mecánica de los éxitos y fracasos económicos de la era de la posguerra. Pero en algún nivel no proporcionan respuestas a las preguntas centrales: ¿Cómo lograron crecer Corea del Sur y Singapur, mientras que Nigeria no aprovechó sus oportunidades de crecimiento? Si la acumulación de capital físico es tan importante, ¿por qué Nigeria no invirtió más en capital físico? Si la educación es tan importante, ¿por qué los niveles de educación en Nigeria siguen siendo tan bajos y por qué el capital humano existente no se utiliza de manera más efectiva? La respuesta a estas preguntas está relacionada con las *causas últimas* del crecimiento económico –los factores que pueden afectar por qué las sociedades toman decisiones tecnológicas y de acumulación diferentes–.
- En algún nivel, las causas últimas son los factores que nos permiten vincular las cuestiones del crecimiento económico con las preocupaciones del resto de las ciencias sociales y hacer preguntas sobre los roles de las políticas, las instituciones, la cultura y los factores ambientales exógenos. A riesgo de simplificar demasiado los fenómenos complejos, podemos pensar en la siguiente lista de posibles causas últimas:
  (1) *suerte* (o equilibrios múltiples) que conducen a caminos divergentes entre sociedades con oportunidades, preferencias y estructuras de mercado idénticas;

(2) *diferencias geográficas* que afectan el entorno en el que viven los individuos e influyen en la productividad de la agricultura, la disponibilidad de recursos naturales, ciertas restricciones en el comportamiento individual o incluso las actitudes individuales;
(3) *diferencias culturales* que determinan los valores, preferencias y creencias de los individuos; y
(4) *diferencias institucionales* que afectan las leyes y regulaciones bajo las cuales los individuos y las empresas funcionan y dan forma a los incentivos que tienen para la acumulación, la inversión y el comercio.

- Por ello, una rama complementaria dentro de la teoría del crecimiento económico trata de identificar como la calidad de las instituciones puede proporcionar una causalidad para explicar el crecimiento económico. En este sentido, destaca la contribución de ACEMOĞLU, JOHNSON y ROBINSON.