3.A.29 : MODELIZACIÓN DINÁMICA DE LAS TOMAS DE DECISIONES. MODELOS DE HORIZONTE INFINITO Y MODELOS DE GENERACIONES SOLAPADAS.

Con el cambio de temario, a partir de la convocatoria de 2023 este tema pasará a ser:
3.A.29: Modelización dinámica de las tomas de decisiones. Modelos de horizonte infinito y modelos de generaciones solapadas.

De este modo, con lo escrito en este documento este tema estaría **actualizado**.

A.29. Modelización dinámica de las tomas de decisiones. Modelos de horizonte infinito y modelos de generaciones solapadas

Título anterior	A.12. Decisiones intertemporales de consumidores y empresas. Modelos de horizonte infinito y modelos de generaciones solapadas
Motivación del cambio	Se aclara el título y se desplaza al apartado de macroeconomía, en el que son especialmente frecuentes los modelos intertemporales de horizonte infinito y los modelos de generaciones solapadas, clara prueba de la microfundamentación de la macroeconomía moderna.
Propuesta de contenido /estructura	I. Caracterización general de la optimización dinámica en Economía I.I. Funcional y función de utilidad; factor y tasa de descuento. Obtención de una senda de consumo básica en un modelo de tiempo finito I.II. Métodos matemáticos alternativos I.III. Propiedades deseables de las series temporales II. Dos modelos de referencia II.I. Agente representativo en horizonte infinito II.II. Generaciones solapadas

INTRODUCCIÓN

- ***Enganche***:

https://youtu.be/W6DVUehdczM?t=6 - *TIME - Gonçalo Fonseca | Blindspots in Economic Thinking*

  – ¿Qué es estática y qué es dinámica en economía? Según HICKS, si se consigue definir una queda definida la otra.
    - En la primera mitad del siglo XX, varios autores trataron de dar dichas definiciones (JOSEPH ALLOIS SCHUMPETER, RAGNAR FRISCH, JOHN HICKS, PAUL SAMUELSON), a veces incompatibles entre sí.
    - La razón de este interés radicaba en que fue entonces cuando se empezaron a sentar las bases del análisis económico dinámico.

- ***Relevancia***:
  – El paso del tiempo es un aspecto ineludible para la ciencia económica.
    - Para comprender y predecir el comportamiento económico, es necesario analizar las interacciones entre agentes, instituciones y mercados a lo largo del tiempo y en diferentes escenarios.

- ***Contextualización***:
  – *Desde un punto de vista histórico*, haciendo un **repaso de la historia del pensamiento económico**, puede considerarse que el análisis económico dinámico no cobra relevancia hasta la primera mitad del siglo XX:
    - La **escuela clásica** se caracterizó por realizar un análisis económico que utilizaba relaciones estáticas y dinámicas mezcladas a conveniencia.
      - Como señala BAUMOL, esto era debido a que por aquel entonces *la economía era «economía política»*, más preocupada por proporcionar argumentos de política económica que por preservar el rigor analítico.
    - Tras la **"revolución marginalista"** de finales de siglo XIX, la economía empezó a adoptar el método científico y el rigor que ello supone, diferenciando estrictamente estática y dinámica. Sin embargo, la dinámica queda ostensiblemente relegada al análisis del ciclo, en favor de los sólidos modelos estáticos (con las audaces excepciones de LÉON WALRAS (y su proceso de *tâtonnement*) o FRANCIS Y. EDGEWORTH (y su modelo de recontratación)).

- Ya en la **primera mitad del siglo XX**, el análisis dinámico cobra importancia de la mano del desarrollo del análisis del capital y su remuneración, variables que sólo pueden explicarse en plenitud desde la perspectiva temporal.
  - Este enfoque dinámico se extenderá al análisis de otros problemas económicos, especialmente macroeconómicos: primero la *teoría de ciclos* [ver tema 3.A.42] y de ahí al *crecimiento económico* [ver tema 3.A.43].
  - Destacan 2 autores en este período de inicios de siglo:
    - IRVING FISHER:
      →Destaca por sus aportaciones a la *teoría del tipo de interés*. Era contrario a la manera vigente de entender los intereses como una remuneración del capital. Pensaba que el interés no era la parte de la renta que recibía el capital, sino una manera de examinar los flujos de renta de todo tipo. Para FISHER, el tipo de interés iba ligado al paso del tiempo. En concreto, es la diferencia entre el valor presente y el valor futuro de una cantidad de renta.
    - FRANK RAMSEY[1]:
      →En su obra *"A Mathematical Theory of Saving"* (1928) soluciona un problema de optimización intertemporal de un agente representativo de vida infinita. Sería un artículo seminal en el marco de la *teoría del crecimiento económico* que iba a dar lugar al modelo de Ramsey-Cass-Koopmans [ver tema 3.A.43].
- Las aportaciones de estos dos autores son sin duda esenciales para desarrollos posteriores en el marco de la teoría macroeconómica de **mediados de siglo XX** que pretenden microfundamentar algunos de los agregados macroeconómicos:
  - La demanda de consumo (FRIEDMAN y MODIGLIANI) [ver tema 3.A.33];
  - La demanda de inversión (EISNER y JORGENSON) [ver tema 3.A.34];
  - La demanda de dinero (BAUMOL y TOBIN) [ver tema 3.A.35]; y
  - La oferta de trabajo (LUCAS y RAPPING) [ver tema 3.A.25].
- Pero no sería hasta los **años 70** cuando, alrededor de la famosa *«crítica de Lucas»* (1976) [ver tema 3.A.6], se reavivó el interés por el análisis dinámico en el contexto de la *microfundamentación de los modelos macroeconómicos*, ayudado de una nueva herramienta matemática, la optimización dinámica. De este modo, el análisis dinámico llegaría a copar la práctica totalidad del análisis macroeconómico.

– Por lo tanto, **¿qué es estática y qué es dinámica en economía?**
- <u>*Análisis estático*</u>: Es el estudio de las relaciones entre variables económicas en un mismo instante o periodo de tiempo.

[1] FRANK RAMSEY fue un filósofo y matemático nacido en Cambridge (y amigo de JOHN MAYNARD KEYNES). Fue un adelantado a su tiempo, que fallece de ictericia a los 26 años dejando un legado en las diversas áreas que estudia a lo largo de su vida. https://es.wikipedia.org/wiki/Frank_P._Ramsey
Además de en matemáticas y filosofía, RAMSEY también hizo contribuciones fundamentales en economía. Destacan 3 aportaciones:
i. El concepto de <u>precio de Ramsey</u>, en el que se precisa la trayectoria óptima que debe seguir el precio de un monopolista regulado, que quiera maximizar el bienestar del consumidor.
ii. Estableció una <u>teoría del comportamiento óptimo de la hacienda pública</u> para la fijación de la imposición más adecuada.
iii. Finalmente, el <u>modelo de Ramsey</u> es uno de los más usados por la macroeconomía. En él, los consumidores se presentan como individuos que maximizan su utilidad a lo largo de un horizonte infinito. Esto es especialmente adecuado para estudiar el crecimiento de las economías, la respuesta óptima del gobierno frente a shocks, etc. Ramsey desarrolló su modelo a finales de los años 20, pero el uso de ecuaciones diferenciales, la herramienta matemática que utilizó para resolverlo, hizo que la mayor parte de los economistas ignoraran su trabajo. No fue hasta 1965 cuando CASS y KOOPMANS desarrollaron paralelamente un modelo muy similar, aceptado por los economistas. Entonces se comprobó que dicho modelo (una versión mejorada del modelo de crecimiento de Solow) era en realidad equivalente al desarrollado casi 40 años antes por Ramsey. Nótese además que sus aportaciones son previas a la publicación de las obras de ROBERT SOLOW (1956) y TREVOR SWAN (1956).

- *Análisis dinámico*: Es el estudio de relaciones entre variables económicas cuyos valores está referidos a distintos instantes o períodos de tiempo.
  - Estas definiciones obligan a hacer algunas puntualizaciones:
    - Primero, obsérvese que *el análisis dinámico no se limita al estudio de variables "a lo largo del tiempo"*, pues esta tarea bien podría hacerla el análisis estático si las variables pueden ser plenamente explicadas por los valores contemporáneos de otras variables, esto es, si el paso del tiempo es una mera repetición de análisis estáticos y la historia previa y el futuro esperado no condicionan en absoluto la situación actual.
    - Segundo, *el análisis dinámico no es estática comparativa, ni tampoco es el análisis de cómo se alcanza un equilibrio desde una situación de desequilibrio*.[2]
    - Finalmente, como señalaba JAN TINBERGEN, la distinción entre estática y dinámica *no es la distinción entre dos tipos de fenómenos sino la distinción entre dos tipos de teorías o formas de pensar*, pues un mismo fenómeno puede estudiarse con herramientas estáticas, habitualmente por defecto dada su simplicidad, o con herramientas dinámicas, si aporta algún valor o si es imprescindible hacerlo de ese modo.
  - La clave formal para distinguir un análisis del otro reside en los subíndices temporales. En un problema intertemporal existirían variables referidas a períodos futuros o períodos pasados, mientras que en un análisis estático todas las variables estarían referidas al mismo momento del tiempo. Por tanto, aquí vamos que el valor añadido de realizar un análisis dinámico es cuando queremos estudiar algún problema económico donde, para estudiar una decisión en un momento del tiempo, importa tener en cuenta otros momentos del tiempo.

- ***Problemática (Preguntas clave)***:
  – ¿Cómo deciden los agentes económicos en un contexto intertemporal?
    - ¿Cómo se modeliza el efecto del tiempo sobre las decisiones de los agentes?
    - ¿Qué técnicas matemáticas se utilizan?

  – ¿Cómo podemos aplicar esta modelización a la macroeconomía? A través de modelos de agente representativo
    - ¿Cuáles son las características principales de los modelos de horizonte infinito?
    - ¿En qué consisten los modelos de generaciones solapadas?

- ***Estructura***:
  – A lo largo de esta exposición se va a considerar equivalente el análisis dinámico y el análisis intertemporal siempre tratando de resaltar que el análisis dinámico o intertemporal es aquel en que genuinamente la perspectiva temporal es relevante[3].

  – La herramienta matemática fundamental para tratar los problemas intertemporales que se verán a lo largo del tema es la **optimización dinámica**, de modo que a lo largo de la

[2] El principio de correspondencia fue "importado" en la economía por PAUL SAMUELSON desde la física (NIELS BOHR).

"… when we leave single economic units, the determination of unknowns is found to be unrelated to an extremum position. In even the simplest business cycle theories there is lacking symmetry in the conditions of equilibrium so that there is no possibility of directly reducing the problem to that of a maximum or minimum. Instead, the dynamical properties of the system are specified, and the hypothesis is made that the system is in "stable" equilibrium or motion. By means of what I have called the Correspondence Principle between comparative statics and dynamics, definite operationally meaningful theorems can be derived from so simple a hypothesis."

"We find ourselves confronted with this paradox: in order for the comparative statics analysis to yield fruitful results, we must first develop a theory of dynamics."

PAUL SAMUELSON, *Foundations of Economic Analysis* (1965) http://files.pucp.edu.pe/departamento/economia/DDD235.pdf

[3] Un problema económico estático puede dinamizarse y sin dificultad resolverse, pero si sus conclusiones no difieren en nada de las del análisis estático, su dinamización es totalmente prescindible. Suele ser el caso de problemas en que el equilibrio dinámico no es más que una mera repetición de equilibrios estáticos. La clave para detectarlos suele estar en los subíndices temporales, referidos todos al mismo período de tiempo.

exposición haremos uso de dicha herramienta y se tratará de poner en valor las aportaciones de la misma en los diferentes problemas tratados.

- No obstante, un común denominador de la optimización dinámica aquí utilizada es la ausencia de interdependencia estratégica entre agentes, que exigiría acudir a otra herramienta de análisis dinámico distinta, la *teoría de juegos dinámicos*.
  - Esta permite, a través de refinamientos del equilibrio de Nash, encontrar los equilibrios de los juegos dinámicos y es de enorme aplicación, entre otros, en economía industrial al estudiar el problema del oligopolio y del poder de mercado compartido entre varios agentes.

1. ANÁLISIS INTERTEMPORAL DE CONSUMIDORES Y EMPRESAS: ENFOQUE MICROECONÓMICO

1.1. Decisiones intertemporales de consumidores

- Una característica diferencial de los problemas dinámicos es la posibilidad de clasificación de las variables económicas de decisión en 2 categorías en función de su referencia temporal:
  - *a)* *Variables flujo*: Son aquellas variables referidas a un *intervalo o lapso de tiempo*. Suelen ser las variables sobre las que se decide directamente y en optimización dinámica de denominan *variables de control* o controles. Un ejemplo sería el consumo.
  - *b)* *Variables stock*: Son aquellas referidas a un *instante del tiempo*. No suelen ser variables de elección directa, sino que su elección queda determinada por las variables flujo, por lo que dichas variables fondo son en realidad elegidas indirectamente. En optimización dinámica se denominan *variables de estado*. Un ejemplo sería la riqueza o patrimonio.
- En función del enfoque, T puede ser un intervalo continuo o un conjunto discreto de fechas consecutivas, y puede ser igualmente finito o infinito ($t = 0, 1, 2, \dots$). Los consumidores eligen *sendas*, *trayectorias* o *corrientes intertemporales* de la variable de elección (consumo, activos, ocio, dinero…), $c = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_T)$, con $c_t \in \mathbb{R}_+^L$, $c_t \geq 0$. En principio nos centraremos en sendas de consumo, donde cada componente es una cesta de L bienes.

1.1.1. Componentes

Preferencias intertemporales → *Función de utilidad intertemporal* (**Útil para la aplicación del cálculo diferencial (y por lo tanto para el planteamiento y resolución de un problema de optimización)*) + *Restricción intertemporal de recursos* } *Problema de maximización de la utilidad* } *Senda intertemporal de consumo*

Las preferencias intertemporales y la función de utilidad

Especificación de la función de utilidad intertemporal

- Sobre el conjunto de cestas factible se establecen unas *preferencias intertemporales*, que en principio pueden representarse[4] a través de una función de utilidad intertemporal, que mida la utilidad total de la senda intertemporal desde la perspectiva del período inicial. Esta función podría adoptar diferentes formas:
  - La **especificación más general**:
  $$V(c) = U(c_0, c_1, c_2, \dots)$$
  - La **propuesta de RAMSEY (1928)**, que ya separa en los dos componentes fundamentales de la misma, función de utilidad instantánea o "felicidad" y una **función de descuento genérica**[5], $D(t)$:
  $$V(c) = \sum_{t=0}^{T} D(t) \cdot u(c_t)$$
  - El modelo estándar, mayoritariamente utilizado a día de hoy, de **utilidad descontada exponencial de SAMUELSON (1937)**, y que será el que utilicemos a lo largo de la exposición:
  $$V(c) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot u(c_t)\,,\ \beta \in [0,1]$$
    - Este descuento exponencial que supondremos en la exposición es habitual en diversos campos de la teoría económica y es de gran utilidad por su sencillez, ya que este tipo de descuento es dinámicamente consistente[6], siendo esto que las preferencias son constantes a lo largo del tiempo (i.e. las preferencias no cambian a lo largo del tiempo a no ser que se presente nueva información).

---

[4] Como se observa, el modelo de utilidad descontada es tan ampliamente utilizado que la "primitiva" de dicha función, esto es, la especificación rigurosa (axiomática) de unas preferencias (binarias) subyacentes se suele obviar. No obstante, autores como KOOPMANS (1960) o FISHBURN y RUBINSTEIN (1982) lo han abordado.

[5] DEMÓCRITO en el siglo IV a.C. ya habló de una teoría de los bienes presentes respecto a los futuros:
"El hombre anciano fue joven una vez, pero nadie puede asegurar que un joven llegue a alcanzar la vejez; así, una mercancía en mano es superior a una que está todavía por llegar."

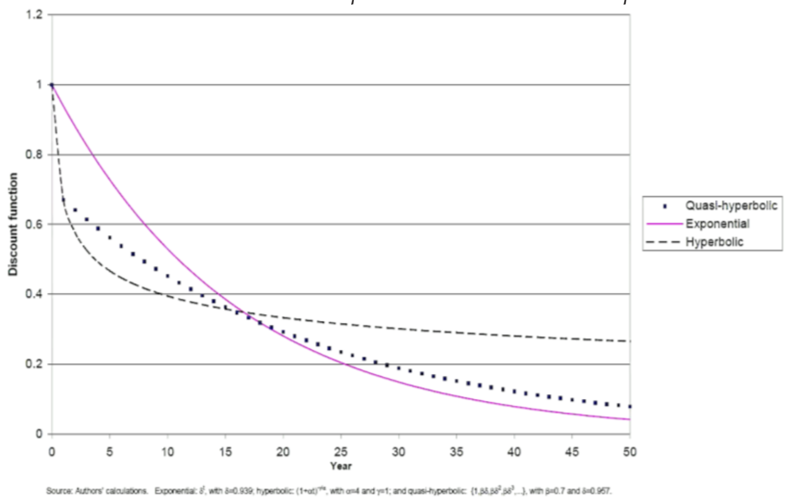
[6] *If discounting is stationary (i.e. if we only care about delay from "now", whenever "now" is), then exponential discounting is the only discount function that yields time-consistent preferences* (STROTZ, 1956 REStud).

- Una crítica a esta modelización ha sido realizada por economistas del comportamiento (*behavioral economics*), como RICHARD THALER[7], que plantean que los humanos no tomamos decisiones descontando de forma exponencial sino que **descontamos de forma hiperbólica**[8]:

$$V(c) = \sum_{t=0}^{T} \frac{u(c_t)}{(1+\alpha \cdot t)^{\gamma/\alpha}}$$

  - Esta especificación se basa en observaciones empíricas y estudios según los cuales nuestras valoraciones caen relativamente rápido para los períodos más cercanos, pero caen más lentamente para períodos más largos (en contra de lo supuesto en el caso exponencial, en el que el factor de descuento permanece constante en el tiempo).
  - Sin embargo, esta modelización lleva a decisiones que no son consistentes en el tiempo (se toman decisiones hoy de forma que el mismo individuo en el futuro se arrepiente de haberlas tomado incluso con la misma información). Esta inconsistencia dinámica ocurre porque las hipérbolas distorsionan el valor relativo de las opciones con una diferencia fija en los retrasos en proporción a lo lejos que está el consumidor de esas opciones.

IMAGEN 1.– *Descuento exponencial vs descuento hiperbólico*



Fuente: https://ocw.mit.edu/courses/14-13-psychology-and-economics-spring-2020/resources/lec3-time-pref-theory-i/

Descuento hiperbólico. (s. f.). Recuperado 28 de septiembre de 2021, de http://stringfixer.com/es/Hyperbolic_discounting
Hyperbolic discounting. (2021). Wikipedia. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hyperbolic_discounting&oldid=1038908957

Componentes función de utilidad intertemporal

- Sus 2 **componentes** pueden analizarse por separado:
  a) *Factor de descuento*[9] *intertemporal exponencial* (β^t): En general, se acepta que la mayoría de los agentes económicos prefieren una recompensa actual a otra futura de igual magnitud. Su justificación se basa en argumentos de mortalidad, impaciencia y visibilidad. En consecuencia, dicha función de descuento es débilmente decreciente conforme el consumo se aleja en el futuro.
    - Es habitual que el factor de descuento se transforme en factor de actualización con una tasa de capitalización equivalente:

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}, \quad \beta \in [0,1]$$

[7] RICHARD THALER fue galardonado con el Premio Nobel de Economía en 2017 «Por sus contribuciones a la economía conductual.»

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_discounting
https://mark-hurlstone.github.io/Week%207.%20Intertemporal%20Choice.pdf
https://ocw.mit.edu/courses/14-13-psychology-and-economics-spring-2020/resources/lec3-time-pref-theory-i/

[9] En términos de matemática financiera, no se debe confundir un factor de descuento con uno de capitalización, pues las leyes de descuento y de capitalización son leyes financieras distintas. Sin embargo, en la literatura de economía intertemporal a menudo se utilizan ambos términos como equivalentes.

b) <u>*Utilidad instantánea o "felicidad"* $(u(c_t))$</u>: Se asume que dicha función está definida en $\mathbb{R}_L^+$ y es estrictamente creciente y cóncava[10]. Se reconoce que las cantidades consumidas (c_t) son de un bien de tipo no duradero[11].

- La característica más importante de esta función es la respuesta del consumo intertemporal a variaciones en el precio (tipo de interés) que exhibe dicha función. Dicha respuesta recibe el nombre de *elasticidad de sustitución intertemporal* (ESI), denotándola por σ y definiéndose como el cambio infinitesimal en el precio relativo del mismo:

$$\boxed{ESI \equiv \sigma = \frac{d\,(c_{t+1}/c_t)/(c_{t+1}/c_t)}{d\,\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|/\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|} = \frac{d\,(c_{t+1}/c_t)}{d\,\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}\cdot\frac{\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}{(c_{t+1}/c_t)}}$$

  - Cuanto mayor sea esta expresión, más "fácil" es sustituir el consumo entre períodos, en el sentido de que hace falta una menor variación de la RMS para "acomodar" un cambio en la proporción consumida en cada período.
  - Cuando introduzcamos los precios y los tipos de interés, la ESI cuantifica cómo responde o se reajusta la senda de consumo intertemporal ante cambios en estos parámetros. Su análisis se realizará en el apartado de estática comparativa.

- Una forma muy habitual y muy conveniente de esta función (por ser un caso general que tiene como casos particulares otras formas funcionales según los valores que tome θ) es la *función de utilidad de elasticidad de sustitución constante* (*o isoelástica*) [ver ACEMOĞLU, pág. 308]:

$$u(c_t) = \begin{cases} \dfrac{{c_t}^{1-\theta}-1}{1-\theta} & si \quad \theta \geq 0 \ y \ \theta \neq 1 \\ ln(c_t) & si \quad \theta = 1 \end{cases}$$

  - Su interés fundamental se encuentra en que dicha familia de funciones presenta elasticidad de sustitución intertemporal constante. Para este tipo de funciones, se demuestra[12] que ESI $\equiv \sigma = 1/\theta$, siendo θ el parámetro de la función de utilidad que, a su vez, representa la elasticidad de la utilidad marginal (i.e. también representa la aversión relativa al riesgo [ver tema 3.A.10])[13].

---

[10] Esto implica que la utilidad marginal es decreciente, y se supone para obtener como resultado la *suavización del consumo*, que hace que a medida que aumenta la cantidad consumida en un período, la utilidad aumenta pero cada vez menos. Esto genera que el individuo prefiera repartir su consumo entre los distintos períodos.
Además, esto implicará que, cuando trabajemos con dos períodos, las curvas de indiferencia sean convexas.
¡Ojo! La implicación va en este sentido, no siempre que trabajamos con curvas de indiferencia convexas la utilidad marginal es decreciente:

$$u''(\cdot) < 0 \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ Curvas\ de\ indiferencia\ convexas$$

[11] Esto se puede explicar de dos maneras: *i)* porque los bienes no duraderos sean los únicos considerados; o *ii)* porque, aun permitiendo bienes duraderos, existen mercados perfectos de alquiler de éstos, de modo que todo bien duradero consumido en múltiples períodos de tiempo puede representarse equivalentemente como una sucesión de bienes no duraderos, adquiridos a su tasa de alquiler.

[12] La elasticidad de sustitución intertemporal quedaría definida como:

$$\text{ESI} \equiv \sigma = \frac{d\,(c_{t+1}/c_t)}{d\,\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}\cdot\frac{\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}{(c_{t+1}/c_t)}$$

$$\left.\begin{aligned} \left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right| &= \frac{\partial u/\partial c_t}{\partial u/\partial c_{t+1}} = \frac{(1-\theta)\cdot\frac{{c_t}^{-\theta}}{1-\theta}}{(1-\theta)\cdot\frac{{c_{t+1}}^{-\theta}}{1-\theta}} = \frac{{c_t}^{-\theta}}{{c_{t+1}}^{-\theta}} = \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta} \\ \frac{d\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}{d\,(c_{t+1}/c_t)} &= \theta\cdot\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta-1} \Rightarrow \frac{d\,(c_{t+1}/c_t)}{d\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|} = \frac{1}{\theta}\cdot\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{1-\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ESI} \equiv \sigma = \frac{d\,(c_{t+1}/c_t)}{d\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}\cdot\frac{\left|RMS_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}{(c_{t+1}/c_t)} = \frac{1}{\theta}\cdot(c_{t+1}/c_t)^{1-\theta}\cdot\frac{(c_{t+1}/c_t)^{\theta}}{(c_{t+1}/c_t)} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \boxed{\text{ESI} \equiv \sigma = \frac{1}{\theta}}$$

[13] Otra propiedad de esta función es que su coeficiente de aversión relativa al riesgo Arrow-Pratt es constante [ver tema 3.A.10]:

$$\left.\begin{aligned} r_r &= -\frac{u''(c_t)\cdot c_t}{u'(c_t)} \\ u(c_t) &= \frac{{c_t}^{1-\theta}-1}{1-\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_r = -\frac{-\theta\cdot{c_t}^{-\theta-1}\cdot c_t}{{c_t}^{-\theta}} \Rightarrow \boxed{r_r = \theta}$$

De este modo, con funciones de utilidad separables en el tiempo, la inversa de la elasticidad de sustitución y el coeficiente de aversión relativa al riesgo son idénticos. Por lo tanto, la familia de funciones de utilidad con aversión relativa al riesgo constante también consiste de aquellas funciones con elasticidad de sustitución intertemporal constante.

En cualquier caso, aquí estamos trabajando en un contexto de perfecta certidumbre, por lo que la propiedad que nos interesa es la elasticidad de sustitución intertemporal constante.

No obstante, podemos interpretar este parámetro como aversión a la dispersión en el consumo.

- Por lo tanto, cuanto mayor sea θ, menor será la ESI y menos responderá el consumo a variaciones del tipo de interés. Gráficamente, θ y σ miden el grado de curvatura de las curvas de indiferencia del agente de manera directa e inversa, respectivamente[14].

  Lo interesante (y conveniente) de estas funciones es doble:

  a) La reacción del consumo intertemporal al tipo de interés queda sintetizada en un único parámetro, y

  b) Dicho parámetro es además constante para todo nivel de consumo.

Propiedades de la función de utilidad intertemporal

- Siguiendo a MAS-COLELL, WHINSTON y GREEN (1995, págs. 733 y ss.), las **propiedades** de la función de utilidad intertemporal son:

  1. *Impaciencia*: Hemos introducido un factor de descuento, β, inferior a la unidad, de modo que dada una senda de consumo no nula, la senda de consumo desplazada un período es estrictamente peor. Esta propiedad implica que una senda de consumo acotada, incluso en un tiempo infinito, tiene valor finito en términos de utilidad, lo que a su vez permite comparar dos sendas de consumo cualesquiera (completitud) y aplicar herramientas de cálculo a la resolución del problema.
  2. *Estacionariedad*: Dadas dos sendas de consumo idénticas hasta cierto período T y diferentes después, la preferencia hoy entre ambas no cambia si adelantamos todas las cantidades consumidas en ambas sendas esos T períodos. Es decir, las preferencias sobre el futuro son independientes de la edad del consumidor.
  3. *Separabilidad aditiva*[15]: La función exhibe dos propiedades de separabilidad:

     i. En toda fecha T, la ordenación de cestas a partir de $T+1$ es independiente del consumo entre 0 y T, y

     ii. En toda fecha T, la ordenación de cestas entre 0 y T es independiente de las expectativas de consumo a partir de $T+1$.

     Conjuntamente, ambas implican aditividad, de modo que si la ordenación de preferencias cumple ambas, entonces dichas preferencias pueden representarse por una función de utilidad de la forma $V(c) = \sum_t u_t(c_t)$. Esto supone que no existen hábitos de consumo.
  4. *Duración del período*:
     - La plausibilidad del supuesto de separabilidad (que hace que la utilidad del consumo en un período no dependa del consumo en otros períodos) depende de la duración del período.
       - Dado que incluso los bienes de consumo más perecederos tienen elementos de durabilidad (en forma, por ejemplo, de un flujo de "servicios" tras el acto de consumo), el supuesto de separabilidad es poco realista si la duración del período elemental es muy corta.

---

[14] El parámetro θ indicará la curvatura de la función:

→Si $\theta = 1$, $(c_t^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)$ convergerá a una función logarítmica, $\ln c_t$, y dará lugar al nivel máximo de concavidad.

→Si $\theta = 0$, $(c_t^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)$ convergerá a una función lineal, $c_t - 1$.

Esta concavidad explicará que el consumidor prefiera consumir una cantidad intermedia cada día a consumir mucho un día y poco otro día. Es decir, dará lugar a una preferencia por el alisamiento del consumo (*consumption smoothing*).

Se puede comprobar de forma sencilla que cuando $\theta = 1$ la función $(c_t^{1-\theta} - 1)/(1-\theta)$ convergerá a una función logarítmica ($\ln c_t$) tomando el siguiente límite:

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} = \frac{0}{0}$$

que constituye una indeterminación. Si aplicamos la regla de l'Hôpital, y calculamos la derivada del numerador y del denominador con respecto a θ, obtendremos que el límite es igual a $\ln c_t$ (recordemos que la derivada de $c_t^{1-\theta}$ con respecto a θ es igual a $-c_t^{1-\theta} \cdot \ln(c_t)$).

$$\lim_{\theta \to 1} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \underset{\substack{Aplicando \\ l'Hôpital}}{=} \lim_{\theta \to 1} \frac{-c_t^{1-\theta} \cdot \ln(c_t)}{-1} = c_t^{1-1} \cdot \ln(c_t) = \ln(c_t)$$

El término -1 del numerador se justifica porque, en su ausencia, el límite cuando θ tiende a 1 sería infinito en lugar de ser un número indeterminado y, por lo tanto, la regla de l'Hôpital no sería aplicable.

[15] La forma correcta de denominar a estas funciones es "separables y aditivas" o "aditivamente separables", pero nunca "aditivas y separables", pues es señal de desconocimiento al ser la aditividad un caso particular (extremo) de la separabilidad, por lo que toda función aditiva es necesariamente separable.

- ¿Entonces qué determina la duración del período?
  - En la medida en que nuestro modelo está orientado a la teoría de la competencia, este período está determinado institucionalmente: debe ser un intervalo de tiempo para el que los precios puedan tomarse como constantes.
- Por otra parte, el valor de β también depende, implícitamente, de la duración del período.
  - Cuanto más corto sea el periodo, más cerca de 1 debería estar β.

5. *Recursividad*: Dada la forma de la función, el flujo de utilidad intertemporal puede descomponerse en la utilidad del consumo hoy y todo el flujo de utilidades futuras evaluadas en el período siguiente:

$$V(c) = u(c_0) + \beta \cdot \sum_t u(c_1, c_2, c_3, \dots)$$

6. *Altruismo*: Si el número de períodos es infinito, entonces podría pensarse que no hablamos de un único individuo, sino de una "dinastía", pero en este caso, suponiendo que se valora el bienestar de los sucesores como si fuera el bienestar futuro de uno mismo.

- De esta formulación de la utilidad intertemporal puede deducirse una característica fundamental: el problema del agente (consumidor), por el momento, no es un problema genuinamente intertemporal, pues la utilidad de un periodo es independiente de la utilidad de cualquier otro[16]. Por lo tanto, el carácter intertemporal del modelo debe venir necesariamente de la restricción de recursos.

Restricciones intertemporales de recursos

- Como se ha señalado, si la utilidad adopta la forma de descuento exponencial, es la restricción de recursos la que debe otorgar naturaleza intertemporal problema.
  – En otras palabras, la restricción de recursos debe ser tal que las decisiones de un período afecten a las posibilidades de decidir de, al menos, un período diferente.

- Podemos distinguir **2 tipos de restricciones de recursos**:
  a) la *ecuación de estado*; y
  b) las condiciones iniciales y terminales.

Ecuación de estado (restricción presupuestaria)

- En cada período, el agente se enfrenta a una restricción presupuestaria de la siguiente forma:

$$\underbrace{\overbrace{P_t}^{=1} \cdot c_t}_{\text{Lo que me gasto en } t} + \underbrace{b_{t+1}}_{\substack{\text{Lo que ahorro en } t \\ \text{para el período siguiente}}} = \underbrace{w_t}_{\text{Lo que gano en } t} + \underbrace{(1 + r_t) \cdot b_t}_{\substack{\text{Rendimiento bruto de lo que} \\ \text{tengo ahorrado delperíodo anterior}}}$$

  – Lo importante de esta restricción es precisamente la variable ahorro (b), pues como se observa es la variable que conecta un periodo con otro (i.e. es la única variable en todo el problema que para un período dado, incorpora un subíndice de un periodo distinto, en este caso el inmediato posterior[17]).
    - La variable b_t no está limitada, lo que opera en mercados de capitales completos, esto es puede prestar o pedir prestado al mismo tipo de interés cuanta cantidad necesite, lo que suele denominarse como ausencia de restricciones de liquidez.

[16] Este es el caso más habitual en el análisis intertemporal del consumidor, aunque se han utilizado formas alternativas de la función de utilidad para incorporar los hábitos en el consumo.

[17] El equivalente de esta característica en tiempo continuo es la presencia de la derivada con respecto del tiempo.

– Como se deduce la restricción intertemporal no es única, sino que *existe una para cada momento del tiempo* (restricciones presupuestarias intratemporales)[18], por lo que hay tantas restricciones como períodos presente el problema[19], solo que todas con la misma forma funcional.
– A partir de la ecuación anterior, despejando, podemos obtener la *ecuación de estado*.

- La *ecuación (o ecuaciones) de estado* describen el cambio de un período a otro de cada una de las variables de estado. En el caso del consumo intertemporal, la ecuación de estado más habitual es la restricción presupuestaria intertemporal, que describe la evolución de la riqueza o activos de un consumidor de un periodo a otro. Su formulación en tiempo discreto es:

$$\underbrace{b_{t+1} - b_t}_{\substack{\equiv \dot{b}_t \\ \text{Variación del} \\ \text{ahorro en } t}} = \underbrace{w_t}_{\substack{\text{Lo que} \\ \text{gano en } t}} + \underbrace{r_t \cdot b_t}_{\substack{\text{Rendimientos de lo} \\ \text{que tengo ahorrado en } t}} - \underbrace{\overbrace{P_t}^{=1} \cdot c_t}_{\substack{\text{Lo que me} \\ \text{gasto en } t}}$$

– Por lo tanto, en todo momento el agente posee dos fuentes de ingresos:
  - Una renta no financiera w_t que puede provenir del trabajo, de la inversión real o ser dotacional, como en nuestro caso;
  - Una renta financiera $r_t \cdot b_t$ proveniente del ahorro.

Condiciones iniciales y terminales

- Finalmente, en los problemas intertemporales también puede haber restricciones en términos de dotación: son las *condiciones iniciales y terminales*.
  – Las condiciones iniciales indican las dotaciones de las variables de estado de las que se parte (en nuestro caso, b_0).
  – Las condiciones terminales indican el nivel que las mismas deben alcanzar en el último período de optimización (b_T), que en ciertos casos pueden quedar abiertas.

1.1.2. Aplicaciones

https://en.wikipedia.org/wiki/Intertemporal_choice

Decisión de consumo intertemporal o decisión de consumo/ahorro: la piedra angular del análisis intertemporal (FISHER, 1930) [Tema 3.A.33]

Supuestos

- IRVING FISHER mostró que en el centro de todo problema intertemporal hay que caracterizar las *hipótesis de comportamiento*, las *preferencias* y las *restricciones presupuestarias*.
  1) *Hipótesis de comportamiento*: Suponemos que existe un agente racional, que maximiza su utilidad y tiene perspectivas *forward-looking*, es decir, en su elección presente tiene en consideración el flujo de ingresos futuros. Además, opera un contexto de perfecta certidumbre (i.e. previsión perfecta).
  2) *Preferencias*: Las preferencias pueden representarse bajo el cumplimiento de una serie de axiomas mediante una función de utilidad creciente y estrictamente cóncava y separablemente aditiva, teniendo como argumentos el consumo en los T períodos que consideramos que vive

[18] Ahora bien, en ciertos problemas se hace conveniente agregar o colapsar todas esas restricciones en una única restricción, iterando a través de la variable activos, de modo que dicha variable termina desapareciendo de esta restricción agregada (salvo sus valores inicial y terminal).

[19] ¡Ojo! No siempre podemos obtener siempre esta restricción intertemporal agregada (mencionada en la nota al pie 18) a partir de las restricciones presupuestarias intratemporales, pues pueden surgir dos problemas:
i. Mercados financieros incompletos: No hay posibilidad de trasladar recursos entre períodos.
ii. Existen activos financieros redundantes: No se puede determinar la cantidad de cada activo.
Esto significa que no se podría obtener la restricción presupuestaria intertemporal, y tendríamos que resolver el problema con las restricciones presupuestarias intratemporales. La macroeconomía moderna hace uso de *modelos macrofinancieros* que tendrán en cuenta estas características al hablar de activos redundantes, de información asimétrica, etc.

el individuo. Consideramos además, una función de utilidad con descuento exponencial *à la* SAMUELSON (1937):

$$V(c) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot u(c_t) \quad ; \quad u'(c_t) > 0 \ ; \quad u''(c_t) < 0$$

donde definimos el factor de descuento $\beta = 1/(1+\rho)$.

3) *Restricciones presupuestarias*: La restricción presupuestaria muestra que el sumatorio de los consumos en los T períodos no puede exceder la riqueza inicial del individuo y los ingresos actualizados (datos exógenos). Suponemos que el consumidor puede ahorrar o pedir prestado, es decir, llevar renta de un período a otro a un tipo de interés:

$$\underbrace{\overbrace{P_t}^{=1} \cdot c_t}_{\text{Lo que me gasto en } t} + \underbrace{b_{t+1}}_{\substack{\text{Lo que ahorro en } t \\ \text{para el período siguiente}}} = \underbrace{w_t}_{\text{Lo que gano en } t} + \underbrace{(1+r_t) \cdot b_t}_{\substack{\text{Rendimiento bruto de lo que} \\ \text{tengo ahorrado delperíodo anterior}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{b_{t+1} - b_t}_{\substack{\equiv \dot{b}_t \\ \text{Variación del} \\ \text{ahorro en } t}} = \underbrace{w_t}_{\substack{\text{Lo que} \\ \text{gano en } t}} + \underbrace{r_t \cdot b_t}_{\substack{\text{Rendimientos de lo} \\ \text{que tengo ahorrado en } t}} - \underbrace{\overbrace{P_t}^{=1} \cdot c_t}_{\substack{\text{Lo que me} \\ \text{gasto en } t}}$$

- El problema del consumidor en tiempo discreto y horizonte finito sería:

$$\max_{\{c_t\}} \quad V(c) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot u(c_t)$$

$$s.a \begin{cases} b_{t+1} - b_t = w_t + r_t \cdot b_t - c_t \\ b_0 = B \\ b_T = 0 \end{cases}$$

  – Esto es, maximizar la utilidad intertemporal sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal y a las condiciones inicial y terminal de recursos[20]. El ingreso no consumido en un período es ahorrado y contribuye a los recursos disponibles para el consumo futuro, de forma que el ahorro se convierte en un *vehículo* de distribución del consumo.

Desarrollo

- Se trata de un problema de optimización intertemporal en tiempo discreto con horizonte finito. El problema intertemporal en tiempo discreto se resolvería aplicando, con carácter general, programación dinámica (ecuaciones de Bellman).
  – Sin embargo, con ciertos problemas más sencillos y sin incertidumbre se pueden utilizar métodos simplificados que hacen uso de las técnicas de optimización estática.
  – En concreto, en este problema es posible (previa sustitución) utilizar el método de multiplicadores de Lagrange, que es un método más sencillo y el que utilizaremos aquí. En cualquier caso, se obtienen al final condiciones de óptimo equivalentes.
    - El método de la sustitución consiste en reordenar la restricción presupuestaria en términos del consumo para proceder a sustituirlo en la función objetivo, de modo que quedaría un problema clásico de optimización incondicionada que se resuelve derivando la función

[20] La condición terminal sería necesaria, pues si bien el agente no tendría incentivos a dejar activos tras su muerte que podrían haberle reportado utilidad en períodos anteriores (de modo que se descarta $b_T > 0$, porque el agente no tiene incentivos que le conduzcan a esta situación), por otra parte una solución trivial del problema sería endeudarse sistemáticamente y consumir con cargo a dichas deudas una cantidad infinita (por lo que el agente puede tener incentivos a que su tasa de ahorro en T sea negativa $b_T < 0$).

respecto a la variable de decisión (la variable de decisión dejaría de ser el consumo y pasaría a ser el ahorro) e igualando a cero:

$$\max_{\{c_t\}} \quad V(c) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot u(c_t)$$

$$s.a \quad \begin{cases} b_{t+1} - b_t = w_t + b_t \cdot r_t - c_t \\ b_0 = B \\ b_T = 0 \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \; c_t = w_t + (1 + r_t) \cdot b_t - b_{t+1}$$

$$\max_{\{b_t\}} V(b) = \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t \cdot u(w_t + (1 + r_t) \cdot b_t - b_{t+1})$$

$$\Big\downarrow \; \frac{\partial V(b)}{\partial b_{t+1}} = 0$$

$$u'(c_t) = \frac{1 + r_t}{1 + \rho} \cdot u'(c_{t+1})$$

- Esta última condición de primer orden recibe el nombre de *ecuación de Euler intertemporal*[21] (para el caso discreto) y tiene una interpretación muy sencilla: en el óptimo, todo agente presenta una senda de consumo tal que la utilidad marginal de una unidad de consumo sacrificada hoy $(u'(c_t))$ se debe igualar con la utilidad marginal que esto le reportaría en el período siguiente $\big((1 + r_t)/(1 + \rho) \cdot u'(c_{t+1})\big)$[22].
  - De no cumplirse, el consumidor siempre podría trasladar consumo entre períodos y aumentar su nivel de utilidad total.
  - Dicha condición puede reordenarse para deducir el perfil de la senda de consumo intertemporal:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{1 + r_t}{1 + \rho}$$

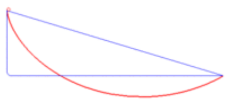
    - Con esta ecuación ya podría estudiarse dicho patrón, pero el análisis se enriquece en sus conclusiones si suponemos que la utilidad es isoelástica[23], de modo que quedaría:

$$\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{-\theta} = \frac{1 + r_t}{1 + \rho}$$

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\theta} = \frac{1 + r_t}{1 + \rho}$$

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{1 + r_t}{1 + \rho}\right)^{\overbrace{1/\theta}^{=\sigma}}$$

[21] El matemático suizo LEONHARD EULER (1707-1783) sirvió como matemático de la corte de Catalina la Grande de Rusia. La ecuación dinámica que lleva su nombre surgió originalmente en el problema de encontrar la famosa *curva braquistócrona*, que es la curva de descenso más rápido entre dos puntos, que es recorrida por un cuerpo que comienza en el punto inicial con velocidad cero, y que debe desplazarse a lo largo de la curva hasta llegar al segundo punto, bajo acción de una fuerza de gravedad constante y suponiendo que no existe fricción.



[22] Dicha unidad que se ha ahorrado y ha generado una renta de capital $(1 + r_t)$, valorada en términos de utilidad $(1 + r_t) \cdot u'(c_{t+1})$ pero para que sea comparable con la utilidad hoy debe descontarse al tipo subjetivo $((1 + r_t)/(1 + \rho) \cdot u'(c_{t+1}))$.

[23] Recordemos que la función de utilidad isoelástica adopta la siguiente forma:

$$u(c_t) = \begin{cases} \dfrac{{c_t}^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} & si \quad \theta \geq 0 \ y \ \theta \neq 1 \\ ln(c_t) & si \quad \theta = 1 \end{cases}$$

- Esta ecuación de Euler reordenada presenta la utilidad de permitir deducir la senda de consumo a través de su tasa de crecimiento[24].

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \left(\frac{1+r_t}{1+\rho}\right)^{\sigma}$$

1) En primer lugar, dados los tipos de interés y descuento, cuanto mayor sea la ESI, mayor será la variabilidad de la tasa de crecimiento óptima del consumo. Esto es lógico, pues un consumidor más "flexible" (elevada ESI) tolera[25] mayores cambios en sus niveles de consumo entre distintos períodos de tiempo, por lo que la tasa de cambio del consumo será más elevada o más reducida, pero en ambos casos con un mismo efecto de mayor volatilidad en los niveles de consumo[26].
2) En segundo lugar, para un valor dado de la ESI, el consumo crecerá, permanecerá constante o decrecerá en un instante dado cuando el tipo de interés sea mayor, igual o menor, respectivamente, que el tipo de descuento intertemporal:
   - Si $r_t > \rho \Longrightarrow c_{t+1} > c_t$: Si el tipo de interés es superior al de descuento subjetivo, el consumo futuro será superior al presente, produciendo un aumento de la tasa de crecimiento del consumo en ese instante, lo que implica que el consumidor será oferente de factor capital o ahorro o tendrá capacidad de financiación.
   - Si $r_t = \rho \Longrightarrow c_{t+1} = c_t$: Si el tipo de interés y de descuento coinciden, el consumo permanecerá estable en ese período.
   - Si $r_t < \rho \Longrightarrow c_{t+1} < c_t$: Si el tipo de descuento subjetivo es superior al de interés, se dará la situación opuesta, siendo el consumidor demandante de factor capital o ahorro, o dicho de otra manera, tendrá necesidad de financiación.

- Se ha hecho expresa mención de la evolución del consumo en un instante de tiempo con objeto de recalcar que, ante un tipo de interés variable, crecimientos y decrecimientos del mismo pueden provocar aumentos y disminuciones del consumo.
  - Sólo en el caso particular de que el tipo de interés sea constante en el tiempo, este perfil creciente/decreciente del consumo detectado entre 2 períodos consecutivos cualesquiera se mantiene para toda la senda intertemporal.
  - Y este caso es interesante para ilustrar uno de los resultados del modelo, el denominado *"alisamiento del consumo"* (*consumption smoothing*) o deseo de los agentes de, manteniéndose constante todo lo demás, disfrutar de sendas de consumo estables en sus tasas de crecimiento (sea positiva, nula o negativa).
    - *i)* Una primera característica del alisamiento es que aumentos o disminuciones en dichas tasas de crecimiento sólo pueden venir de cambios en los tipos de interés.
    - *ii)* ¿Pero cómo es posible que el perfil de consumo no dependa de los recursos o rentas del consumidor? Esta es la segunda característica del alisamiento del consumo, pues si el agente tiene acceso a mercados de capital perfectos (puede prestar y pedir prestado al tipo de interés vigente sin limitaciones o restricciones de liquidez), entonces podrá trasladar cualquier cantidad de renta entre períodos, manteniendo estable (en tasas) dicho perfil de consumo.
    - *iii)* Y como tercera característica, los niveles concretos de consumo en los distintos períodos sí que van a depender de los recursos (rentas) del consumidor, pero dichos niveles no dependerán de los recursos del período, sino de la riqueza

[24] Nótese que $\frac{c_{t+1}}{c_t}$ es igual a $\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} + 1$, o sea, la tasa de crecimiento del consumo más uno.

[25] El verbo "tolerar" no está elegido casualmente, pues las propiedades genéricas de la función de utilidad instantánea implican que en todo caso el agente desea "alisar" su consumo, repartirlo en una senda más bien estable (no necesariamente constante). Por ello, mayor ESI no implica "amor por la variabilidad" del consumo, sino simplemente menor aversión o desutilidad ante dicha variabilidad.

[26] Autores como MANKIW y CAMPBELL (1989) han examinado cómo responde el crecimiento del consumo a las variaciones del tipo de interés real: coinciden en que lo hace en escasa medida, lo que sugiere que la elasticidad intertemporal de sustitución, σ, es pequeña.

total del agente, que comprende lo acumulado en activos hasta dicho instante más todas las rentas futuras actualizadas.

- Este estudio arroja importantes **resultados** en relación al consumo:
  - <u>*El consumo en un período no depende de la renta corriente*</u> (y_t), sino de un horizonte temporal más amplio[27]. Este razonamiento es el origen de la *Teoría de la renta permanente* de FRIEDMAN (1957)[28].
  - <u>*El consumo se suaviza*</u>: el ahorro se acomoda para poder llevar a cabo un consumo suavizado a lo largo de la vida[29]. Este razonamiento es el origen de la *Teoría del ciclo vital* de MODIGLIANI y BRUMBERG (1954) y MODIGLIANI y ANDO (1960).

Implicaciones de política económica

- En relación a las **implicaciones de política económica**:
  - En relación a la <u>*política fiscal*</u>, existen economistas que han insinuado que un tratamiento fiscal más favorable de los intereses haría aumentar el ahorro y favorecería el crecimiento. Ahora bien, si el consumo fuera relativamente insensible al tipo de interés como parece que ocurre, (vid. nota al pie 26) esta política sería menos eficaz.
  - Igualmente, esta baja sensibilidad del consumo al tipo de interés implicaría que una <u>*política monetaria*</u> expansiva de reducción de tipos de interés no sería tan efectiva en términos de aumentar el consumo.

Estática comparativa

- Pasamos a realizar un estudio de estática comparativa para estudiar cómo afectan los cambios en los distintos parámetros a esta decisión, para lo cual recurriremos a un análisis gráfico del problema (por lo que recurriremos a un caso de dos períodos ($t = 1,2$)):

$$\max_{\{c_1,c_2\}} \quad V(c) = u(c_1) + \beta \cdot u(c_2)$$

$$s.a \quad \left.\begin{aligned} p_1 \cdot c_1 + b_2 = m_1 \\ p_2 \cdot c_2 = m_2 + b_2 \cdot (1+i) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (1+i) \cdot p_1 \cdot c_1 + p_2 \cdot c_2 \leq (1+i) \cdot m_1 + m_2 \Rightarrow c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq m_1/p_1 + \frac{m_2/p_2}{1+r}$$

$$\Big\downarrow \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 \text{ y } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{\sigma}$$

---

[27] Una política anunciada hoy y que afecte a la renta futura tendrá efectos sobre el consumo presente.

[28] La evolución temporal de la renta no es, pues, importante para el consumo, pero es clave para el ahorro, pues éste es la diferencia entre renta y consumo corrientes. Por tanto, el ahorro es alto cuando la renta es más elevada y viceversa.

[29] En este caso, debido a los supuestos simplificadores del modelo (principalmente los tipo de descuento y tipo de interés nulos) obtenemos que el consumo se mantiene constante a lo largo de todos los períodos.

En cualquier caso, incluso introduciendo estas variables obtenemos como resultado el denominado "alisamiento del consumo" (*consumption smoothing*) o deseo de los agentes de, manteniéndose constante todo lo demás, disfrutar de sendas de consumo estables en sus tasas de crecimiento (sea positiva, nula o negativa).

- Una primera característica del alisamiento es que aumentos o disminuciones en dichas tasas de crecimiento sólo pueden venir de cambios en los tipos de interés (o en el tipo de descuento, que habitualmente se asume constante).
- ¿Pero cómo es posible que el perfil de consumo no dependa de los recursos o rentas del consumidor? Esta es la segunda característica del alisamiento del consumo, pues si el agente tiene acceso a mercados de capital perfectos (puede prestar y pedir prestado al tipo de interés vigente sin limitaciones o restricciones de liquidez), entonces podrá trasladar cualquier cantidad de renta entre períodos, manteniendo estable (en tasas) dicho perfil de consumo.
- Y como tercera característica, si van a depender de los recursos (rentas) del consumidor los niveles concretos de consumo en los distintos períodos, pero dichos niveles no dependerán de los recursos del período, sino de la riqueza total del agente, que comprende lo acumulado en activos hasta dicho instante más todas las rentas futuras actualizadas.

<u>*Variaciones en la forma de la utilidad instantánea (cambios en la ESI)*</u>

- Como se ha dicho, el parámetro que sintetiza la actitud del consumidor frente al consumo intertemporal es la ESI (σ).
  - En términos gráficos, para el caso de dos períodos ($T = 2$) la ESI se refleja en la curvatura de las curvas de indiferencia: cuanto mayor sea la ESI, menor curvatura presentarán dichas curvas de indiferencia.
  - El aumento de σ puede provocar una mayor volatilidad en los niveles de consumo. Por lo tanto, en líneas generales, se podría afirmar que los agentes con las ESIs más altas tenderán a demandar/ofrecer más capital en los mercados.

<u>*Variaciones en la renta y/o riqueza del agente*</u>

- Los niveles de consumo dependen de la riqueza total del agente, entendida como la suma de todos los activos acumulados hasta la actualidad y todas las rentas futuras actualizadas. En este sentido es necesario hacer 2 consideraciones:
  - *i.* En primer lugar, los aumentos en la renta de un período o en la riqueza van a tener, en general, un *efecto distribuido* sobre todos los distintos períodos (consecuencia del fenómeno de "alisamiento del consumo"[30]). Es por ello por lo que para estudiar cómo afectan los cambios en la renta en las decisiones de los agentes, solemos distinguir entre cambios transitorios de la renta y cambios permanentes de la renta:
    - Con cambios transitorios, el efecto sobre los niveles de consumo suele ser pequeño e incluso imperceptible.
    - Con cambios permanentes el efecto puede ser significativo.
  - *ii.* Y la segunda idea básica es determinar el signo de dicho cambio en renta o riqueza sobre el consumo, esto es la calificación del consumo como bien *normal* o *inferior* o *independiente*.
    - En general, dado que el consumo es el mismo bien (cesta de bienes) en diferentes períodos, si es normal/inferior en uno parece sensato que lo sea en todos los restantes.
    - Y dado que estamos hablando del consumo en su conjunto (la cesta de todos los bienes), la experiencia parece indicar que se tratará de un bien normal, por lo que dichas variaciones de renta/riqueza provocarán variaciones en igual sentido en los niveles de consumo de todos los períodos.

<u>*Variaciones en el tipo de interés*</u>

- El tipo de interés es el "precio" del modelo, el parámetro fundamental.
  - Desgraciadamente, el efecto de variaciones en el mismo sobre las sendas óptimas de consumo va a quedar, en general, indeterminado.
  - La razón es la existencia de diferentes efectos contrapuestos ante una variación dada del tipo de interés. En concreto, existen tres efectos diferenciados, siguiendo a OBSTFELD y ROGOFF (1996):
    1) *Efecto sustitución* (*ES*): Un aumento del tipo de interés encarece el consumo presente, pues su coste de oportunidad, la remuneración del ahorro aumenta. Por lo tanto, manteniendo inalterado el nivel de utilidad de partida, reducirá el consumo presente y

---

[30] En este marco, si suponemos que ρ y r son constantes en todos los períodos y que el consumidor tiene libre acceso a un mercado de capitales perfecto, el consumidor muestra una tendencia por alisar su consumo siempre (entendiendo por alisar su consumo como mantener una tasa de crecimiento constante de sus senda de consumo), independientemente de los valores que tomen ρ y r [ver pregunta 7 del test oficial de 2021].

Test 2020

7. En un marco intertemporal de horizonte finito, tiempo discreto y perfecta certidumbre, las preferencias de un consumidor vienen representadas por medio de una función de utilidad intertemporal à la Samuelson: $U = \sum_0^T \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t U(C_t)$, donde ρ es la tasa de descuento intertemporal, que es constante en todos los períodos, al igual que el tipo de interés r. Si este consumidor tiene libre acceso a un mercado de capitales perfecto que le permite mover renta entre períodos, mostrará una tendencia por alisar su consumo (mantener una tasa de crecimiento constante de su senda de consumo) si:

a El alisamiento del consumo no depende de los valores que tomen ρ y r.

b Solo si $\rho = r$.

c Solo si $\rho > r$.

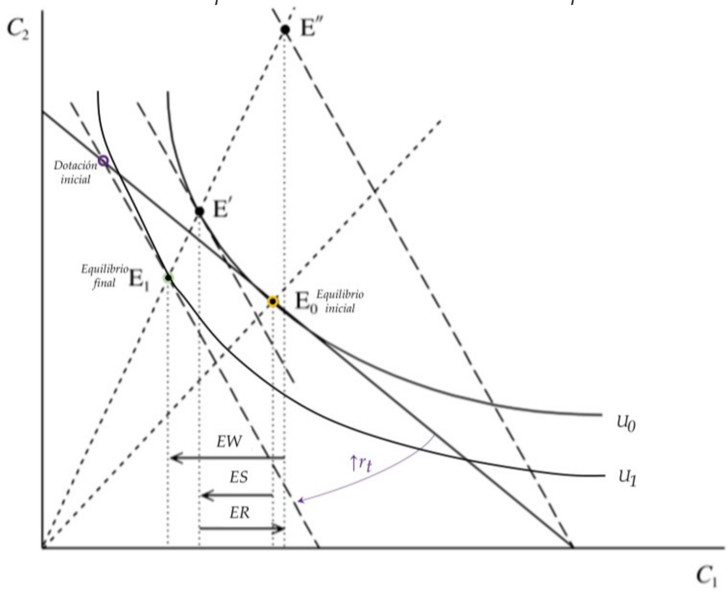
d Solo si $\rho < r$.

aumentará el ahorro o consumo futuro, con lo que el efecto sustitución sobre el consumo presente será negativo.

2) *Efecto renta ordinario* (*ER*): Un aumento del tipo de interés permite, considerando inalterada la riqueza intertemporal del agente, alcanzar un mayor consumo futuro (el mismo ahorro se remunera más), lo que lleva a aumentar también (por el fenómeno de alisamiento del consumo) el consumo presente y reducir el ahorro. El efecto renta sobre el consumo presente será, por tanto, positivo.
3) *Efecto renta dotación o efecto riqueza* (*EW*): Las rentas futuras se valoran (actualizan) con el tipo de interés, por lo que un aumento del tipo de interés supone una depreciación de las rentas futuras y una reducción de la riqueza, lo que conlleva un menor consumo presente y un mayor ahorro. Por lo tanto, el efecto riqueza sobre el consumo presente será negativo. Realmente, equivaldría a un efecto renta-dotación o efecto renta-directo del análisis estático, pues refleja que los cambios en los precios modifican el valor de la dotación del agente, sus rentas futuras o riqueza.

– **Gráficamente**, pueden ilustrarse estos 3 efectos en un modelo de 2 períodos con utilidad isoelástica[31], renta dotacional (los niveles de renta se representan por el punto sobre el que pivota la recta de balance al variar el tipo de interés) y en el que tiene lugar un aumento del tipo de interés[32]:

IMAGEN 2.– *Estática comparativa ante un aumento en el tipo de interés*



Fuente: Adaptado de Heijdra, B. J. (2017). *Foundations of modern macroeconomics (Third edition).* Oxford University Press. Pág. 199. Ver modelo desarrollado en Intermezzo 6.1. (págs. 196-200)

[31] Las funciones isoelásticas son homotéticas, lo que facilita enormemente el análisis gráfico, pues los puntos E_1, E' y E'' se hallan sobre un mismo radio vector, ya que una propiedad de las funciones homotéticas es que la pendiente de las curvas de nivel a lo largo de un radio vector es la misma. De este modo, no es necesario dibujar la curva de indiferencia final, pues sabemos que el equilibrio final E_1 se hallará en la intersección de este radio vector y la nueva recta de balance.

[32] Aunque el tipo de interés real medio en la economía de Estados Unidos para el periodo 1962-2023 se ha situado en el +2 %, ha habido años por encima de la media y años por debajo de la media, tanto con valores positivos como negativos. También existe una gran divergencia entre las décadas con menor inflación y las de alta inflación, divergencias provocadas por las diferentes primas de riesgo por inflación (*inflation-risk premium*) exigidas por los inversores en las rentabilidades nominales de los bonos. Por ejemplo, en las décadas de 1990 y 2000 la Reserva Federal de EE.UU. bajo el mandato del presidente GREENSPAN (1987-2006) aplicó una política monetaria restrictiva cuyo objetivo principal era reducir la altas tasas de inflación heredadas. La consecuencia es que los inversores del mercado de bonos de deuda pública redujeron sus objetivos de demanda de altas primas de riesgo por inflación.

Durante los próximos años, se espera que la Reserva Federal mantenga *tipos de interés a corto plazo relativamente altos para controlar la inflación*. Si la Reserva Federal continúa con su convicción de controlar la inflación, no debería sorprendernos que los rendimientos de los bonos aumenten mucho menos que el cambio en las tasas a corto plazo.

↪

- El equilibrio de partida es E_0. Cuando se produce un aumento del tipo de interés que hace pivotar la recta de balance, aumentando su pendiente (en valor absoluto) se pueden identificar los tres efectos en términos de C_1:
  1) Con el nuevo tipo de interés y la utilidad inicial, el equilibrio sería E', siendo la distancia entre E_0 y E' el *efecto sustitución* (*ES*).
  2) El *efecto renta* (*ER*) es la distancia entre E' y E'', que representa el punto que se daría "como si" con el nuevo tipo de interés, el agente no tuviese renta dotacional en el segundo período, es decir, como si no hubiese efecto riqueza (la restricción presupuestaria pivotaría sobre la abscisa en el origen.
  3) En cualquier caso, esto no es así, ya que el agente sí que posee renta en el segundo período, por lo que el *efecto riqueza* (*EW*) viene marcado por la distancia entre E'' y E_1, el equilibrio final.
- En este caso concreto, se observa como el aumento en los tipos de interés provoca una pérdida en el bienestar del consumidor.
  - Esto tiene sentido, pues el agente era prestatario debido a un reconocible sesgo por el consumo presente (reflejado por la diferencia entre la dotación inicial y el equilibrio inicial).
  - De este modo, al aumentar el tipo de interés sus deseos de pedir prestado en el primer período se ven mermados.

– También podemos analizar estos efectos **analíticamente** mediante la **ecuación de Slutsky**. En este caso la función de demanda de consumo para el período 1 se puede denotar como $C_1(\boldsymbol{p},M)$, donde $M = p_1 \cdot m_1 + \frac{p_2 \cdot m_2}{1+i}$ es la renta dotacional[33]:

$$\underbrace{\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dp_1}}_{\text{Efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\bar{U})}{\partial p_1}}_{\text{Efecto sustitución}} \underbrace{-C_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}}_{\text{Efecto renta ordinario}} + \underbrace{m_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}}_{\text{Efecto renta dotación}}$$

Sacando factor común:

$$\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dp_1} = \frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\bar{U})}{\partial p_1} + (m_1 - C_1) \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}$$

- Esta ecuación es tan solo la ecuación de Slutsky habitual en la que tenemos en cuenta la variación en la valoración de la renta dotacional. En el modelo estándar sin dotaciones,

---

Un tipo de interés real negativo significa que la inflación es más alta que los tipos de interés nominales. Y esta circunstancia afecta a las decisiones de ahorro y consumo de los hogares, al endeudamiento y a las decisiones de inversión pública.
- En lo que respecta a los ahorradores,
  - Por un lado, la caída en los tipos de interés reales es una mala noticia para los ahorradores pues verán una caída en el valor real de sus activos, y la rentabilidad de sus ahorros será insuficiente para cubrir el aumento del coste de vida (*efecto renta*).
  - Por otro lado, los tipos de interés reales negativos deberían alentar a la gente a gastar, ya que no tiene sentido ahorrar más (*efecto sustitución*).
    - La *evidencia empírica* disponible sugiere que la gente en realidad puede estar poniendo más esfuerzo en ahorrar que en consumir más porque la rentabilidad del ahorro es muy baja. *Desde el punto de vista microeconómico, el efecto renta sería mayor que el efecto sustitución*.
- En lo que respecta a los prestatarios, la inflación erosiona el valor de sus deudas y reducirá su carga de intereses. Por ello, habrá un incentivo en los hogares (y para el gobierno) de endeudarse más.

http://vicenteesteve.blogspot.com/2023/06/evolucion-historica-de-los-tipos-de.html

[33] Por el teorema de la dualidad sabemos que en el óptimo las demandas son idénticas. Por tanto, si la riqueza en el problema primal coincide con el gasto mínimo en el problema dual para el nivel de utilidad que ha sido maximizado en el problema primal [ver tema 3.A.9], tenemos que:

$$C_1^h(\boldsymbol{p},\bar{U}) = C_1\left(\boldsymbol{p},E(\boldsymbol{p},\bar{U})\right)$$

A partir de esta igualdad podemos derivar con respecto de p_1:

$$\frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\bar{U})}{\partial p_1} = \frac{\partial C_1\left(\boldsymbol{p},E(\boldsymbol{p},\bar{U})\right)}{\partial p_1}$$

$$\frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\bar{U})}{\partial p_1} = \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial p_1} + \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{\partial E(\boldsymbol{p},\bar{U})}{\partial p_1}}_{=C_1^*}}_{\text{Por el lema de Shephard}}$$

$$\frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial p_1} = \frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\bar{U})}{\partial p_1} - C_1^* \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}$$

↪

todo el consumo del bien *1* es comprado y por lo tanto sujeto del efecto renta (no hay efecto riqueza). Con una dotación, solo la cantidad comerciada en los mercados es sujeto del efecto renta, mientras que el resto es efecto riqueza.

- Pensemos en el caso del bien normal. Cuando sube su precio, el efecto-sustitución y el efecto-renta tienden ambos a reducir el consumo. Pero supongamos que este consumidor es un vendedor neto de este bien. En ese caso, su renta efectiva aumenta y este efecto renta-dotación puede provocar, de hecho, un aumento del consumo del bien.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td>Efecto sustitución</td><td>Efecto renta ordinario</td><td>Efecto renta dotación</td><td>Efecto total</td></tr>
<tr><td>$\frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\overline{U})}{\partial p_1}$</td><td>$-C_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}$</td><td>$m_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}$</td><td>$\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dr}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">C_1 es un bien normal
$\frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} > 0$</td><td rowspan="2">Ahorrador
$(C_1 < m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>≤ 0</td><td>≥ 0</td><td rowspan="2">?</td></tr>
<tr><td colspan="2">≥ 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Neutral
$(C_1 = m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>≤ 0</td><td>≥ 0</td><td rowspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$= 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prestatario
$(C_1 > m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>≤ 0</td><td>≥ 0</td><td rowspan="2">≤ 0[34]</td></tr>
<tr><td colspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td rowspan="6">C_1 es un bien frontera
$\frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} = 0$</td><td rowspan="2">Ahorrador
$(C_1 < m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>$= 0$</td><td>$= 0$</td><td rowspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$= 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Neutral
$(C_1 = m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>$= 0$</td><td>$= 0$</td><td rowspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$= 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prestatario
$(C_1 > m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>$= 0$</td><td>$= 0$</td><td rowspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$= 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">C_1 es un bien inferior
$\frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} < 0$</td><td rowspan="2">Ahorrador
$(C_1 < m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>≥ 0</td><td>≤ 0</td><td rowspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Neutral
$(C_1 = m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>≥ 0</td><td>≤ 0</td><td rowspan="2">≤ 0</td></tr>
<tr><td colspan="2">$= 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Prestatario
$(C_1 > m_1)$</td><td rowspan="2">≤ 0</td><td>≥ 0</td><td>≤ 0</td><td rowspan="2">?</td></tr>
<tr><td colspan="2">≥ 0</td></tr>
</table>

- En cualquier caso, en general el efecto neto de una variación del tipo de interés es a priori ambiguo, pues los efectos sustitución y riqueza (negativos) se ven contrarrestados por el efecto renta (positivo).

Si no existieran dotaciones iniciales, la ecuación anterior serviría como ecuación de Slutsky para descomponer los efectos renta y sustitución. Sin embargo, en este modelo es necesario tener en cuenta el efecto renta dotación [ver Busch, L.-A. (s. f.). 3. Inter-temporal Economics. http://www.arts.uwaterloo.ca/~lbusch/lab_micro_ch3.pdf (página 46)]:

$$\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dp_1} = \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial p_1} + \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial p_1} \Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dp_1}}_{\text{Efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\overline{U})}{\partial p_1}}_{\text{Efecto sustitución}} \underbrace{-C_1^* \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}}_{\text{Efecto renta ordinario}} + \underbrace{\frac{\partial M}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}}_{\text{Efecto renta dotación}}}$$

El análisis le realizamos sobre p_1 por simplicidad analítica, pero las conclusiones son las mismas si lo realizamos sobre i. El razonamiento es el siguiente:

$$\left.\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dr} = \frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dp_1} \cdot \frac{dp_1}{dr}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \underbrace{\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dp_1}}_{\text{Efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\overline{U})}{\partial p_1}}_{\text{Efecto sustitución}} \underbrace{-C_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}}_{\text{Efecto renta ordinario}} + \underbrace{m_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M}}_{\text{Efecto renta dotación}} \\ 1 + r = \frac{1+i}{1+\pi} = \frac{1+i}{(p_2/p_1)} \Rightarrow \frac{dr}{dp_1} = \frac{1+i}{p_2} \Rightarrow \frac{dr}{dp_1} = \frac{p_2}{1+i} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dC_1(\boldsymbol{p},M)}{dr}}_{\text{Efecto total}} = \underbrace{\frac{\partial C_1^h(\boldsymbol{p},\overline{U})}{\partial p_1} \cdot \frac{p_2}{1+i}}_{\text{Efecto sustitución}} \underbrace{-C_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} \cdot \frac{p_2}{1+i}}_{\text{Efecto renta ordinario}} + \underbrace{m_1 \cdot \frac{\partial C_1(\boldsymbol{p},M)}{\partial M} \cdot \frac{p_2}{1+i}}_{\text{Efecto renta dotación}}$$

Por lo tanto, todos los efectos deberían ser multiplicados por $p_2/(1+i)$, que asumimos constante y positivo, por lo que afecta a todos los efectos en la misma proporción y no afecta a ninguno de los signos obtenidos en la tabla.

[34] Este es el caso representado en la Imagen 2.

Extensiones

Introducción del dinero en efectivo en la economía

- Una cuestión interesante que podemos analizar en este modelo sencillo es el manejo del tipo de interés característico de la *política monetaria* de la mayoría de Bancos Centrales en la década de 2010.
  - Antes de eso, vamos a ver un caso teórico donde el tipo de interés que vacía el mercado de ahorro e inversión es negativo, basándonos en las condiciones de Euler.
    - A priori parece contraintuitivo porque existe un factor de descuento que muestra impaciencia (i.e. captura las preferencias temporales por el presente).
    - Sin embargo, hay que tener en cuenta un segundo factor que aparece en la Ecuación de Euler: el cociente de utilidad marginales.

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{1 + r_t}{1 + \rho}$$

      - Por algún motivo puede ser más valiosa una unidad de consumo mañana que hoy (p.ej. mucha renta hoy), con lo cual, es posible que la utilidad marginal de consumir mañana sea mayor que la de consumir hoy.
      - Si la utilidad marginal de consumir mañana es lo suficientemente grande comparada a la utilidad marginal de consumir hoy (i.e. teniendo en cuenta el factor de descuento) el tipo de interés real que vacía el mercado puede ser negativo.
  - Imaginemos que introducimos dinero en efectivo en la economía y la mayoría de los activos financieros se denominan en términos nominales (i.e. en términos de la moneda de la economía). Se modifica la ecuación de Euler para incluir el tipo de interés nominal y la tasa de inflación[35].

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \frac{(1 + i_t)}{(1 + \rho) \cdot (1 + \pi_t)}$$

    - La presencia de dinero en efectivo impone una restricción adicional, y es que <u>el tipo de interés nominal debe ser igual o mayor que cero porque existe la posibilidad de ahorrar en términos de efectivo</u> (dado que el dinero en efectivo tiene un retorno nominal igual a cero, nadie aceptará comprar un bono que le rinda menos que el dinero en efectivo).
    - Supongamos que la utilidad marginal de consumir mañana es lo suficientemente grande comparada a la utilidad marginal de consumir hoy (i.e. teniendo en cuenta el factor de descuento), de modo que el tipo de interés real que vacía el mercado es negativo (pues además suponemos que los agentes son muy pacientes).
    - Si la inflación y el factor de descuento son reducidos no se podría satisfacer al mismo tiempo un tipo de interés real negativo derivado de la situación de la economía y la restricción de tipo de interés nominal positivo.

$$\underbrace{\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})}}_{<1} = \frac{(1 + i_t)}{\underbrace{(1 + \rho)}_{\substack{\simeq 1 \text{ (i.e. } \rho \simeq 0) \\ \text{i.e. agentes muy pacientes}}} \cdot \underbrace{(1 + \pi_t)}_{\substack{\simeq 1 \text{ (i.e. } \pi_t \simeq 0) \\ \text{i.e. inflación muy reducida}}}} \Rightarrow (1 + i_t) < 1 \Rightarrow i_t < 1$$

    - El mercado se vacía por el lado corto con ajuste en cantidades en este caso: generando una inversión reducida.
  - Este análisis arroja importantes *implicaciones de política económica*. Las políticas de tipo de interés reducido y negativo tienen un fundamento teórico ya que el dinero en metálico nos deja expuestos a un problema de coordinación intertemporal.
    - En un mundo donde la cota cero de los tipos de interés nominales es operativa buena parte de las intuiciones habituales de política económica funcionan al revés.
      - Una reducción del gasto público improductivo, al incrementar el ahorro nacional, agrava la situación.

[35] Recordemos que por la ecuación de FISHER: $(1 + i) = (1 + r) \cdot (1 + \pi)$

- De igual manera, un incremento de la inflación, al reducir el tipo de interés real, ayuda a vaciar el mercado de inversión-ahorro a un mejor nivel de actividad económica.

Decisión de inversión en capital humano: el teorema de separación en consumidores (BECKER, 1962)

- BECKER (1962) considera que la educación y la formación es una inversión que lleva a la acumulación de capital humano, lo que incrementa la productividad marginal del trabajo y con ella la remuneración salarial futura [ver tema 3.A.25].
  - BECKER traslada la teoría de la elección basada en la optimización a la decisión de educación.
  - Además, respecto a la decisión de educación, BECKER fue clave en concebir la educación como decisión de inversión y no como un gasto, lo que comporta un contexto dinámico.

- En el caso de los hogares, les corresponde la decisión sobre formación general, pues ninguna empresa tendrá incentivos en costear al trabajador una formación que podría explotar en otras empresas.
  - En el primer período, el individuo se educa a un coste (p.ej. costes de matriculación, de alojamiento, de desplazamiento y coste de oportunidad por las pérdidas de rentas potenciales que podría haber obtenido de no dedicar tiempo a su formación).
    - Los individuos invertirán en formación general hasta que el rendimiento marginal descontado de una unidad de capital humano sea igual al coste marginal de dicha inversión. Ello implica maximizar el valor presente de su inversión.
  - En el segundo período, el individuo maximizará su utilidad que depende de su consumo.

- Nótese que para determinar la decisión en educación hemos obviado la definición de una función objetivo. Un supuesto subyacente que hemos manejado ha sido el cumplimiento del *teorema de la separación* de ACEMOĞLU y AUTOR, que establece que bajo ciertas condiciones las decisiones de inversión son independientes de las decisiones de consumo. En concreto, en presencia de mercados de capitales perfectos (posibilidad de endeudarse y prestar sin limitaciones al mismo tipo de interés) y de ocio que no reporta utilidad, la decisión de inversión óptima para un consumidor se reduce a encontrar aquella que ofrece el máximo valor presente (método del VAN) de los flujos de renta, esto es, que maximiza la riqueza del agente, al igual que haría una empresa.
  - Por consiguiente, el proceso de optimización del individuo puede separarse en dos etapas:
    - *i.* Primero, el problema de optimización para determinar la inversión en capital humano.
    - *ii.* Segundo, una vez maximizada la riqueza, la optimización del consumo.

Decisiones en condiciones de incertidumbre: decisión de cartera (C-CAPM) e hipótesis del paseo aleatorio (ROBERT HALL)

1.2. Decisiones intertemporales de empresas

Sería necesario introducir costes de ajuste para que el problema sea genuinamente intertemporal. Una posibilidad es copiar lo del tema 3.A.34 aquí, ya que el modelo de Robinson Crusoe se podría enfrentar a la crítica de no ser decisiones de empresas sensu stricto y viene en el título del tema.

1.2.1. *Componentes: producción intertemporal y restricción tecnológica (acumulación de factores)*

Producción y beneficios intertemporales

- La empresa, como agente encargado de las decisiones de producción que demanda factores productivos y oferta bienes en los mercados, elegirá la senda de producción intertemporal (y) que le permita alcanzar su objetivo, que supondremos en este caso la maximización del beneficio intertemporal $\left(\pi(y)\right)$, esto es, la maximización del valor actualizado de todos sus beneficios futuros[36].

[36] En un modelo de equilibrio general competitivo o de propiedad privada, en el que las empresas son propiedad de los consumidores y son perfectamente controladas por estos, este objetivo maximizador es irrebatible pues, como hemos visto al tratar el teorema de separación, los consumidores maximizadores de utilidad desearán maximizar su conjunto presupuestario, lo que necesariamente implica maximizar el beneficio intertemporal de sus empresas.

Supondremos en general que la empresa opera en un entorno competitivo sin interdependencia estratégica percibida, por lo que serán empresas precio-aceptantes en los mercados de bienes y de factores.

- El beneficio intertemporal de la empresa puede expresarse como (discreto o continuo):

$$\max_{\{y_t\}} \Pi = \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+r}\right)^t \cdot \pi_t(y_t)$$

$$\max_{\{y_t\}} \Pi = \int_0^T e^{-r\cdot t} \cdot \pi_t(y_t)$$

siendo π_t el beneficio en el período t.

- De modo distinto a como ocurría con los consumidores, a la función de beneficio intertemporal no se le imponen propiedades especiales y en el caso más general se utiliza la función de beneficio de la teoría microeconómica estática, del problema de maximización del beneficio en una etapa o en dos etapas respectivamente:

$$\pi_t = p_t \cdot y_t(z_t) - w_t \cdot z_t$$
$$\pi_t = p_t \cdot y_t - C(y_t)$$

- De esta representación se deduce que, al igual que sucedía con el caso del consumidor, la función objetivo de la empresa no es genuinamente intertemporal, ya que la producción (y el beneficio) en un período no afectan en absoluto a la producción (y beneficio) de algún período distinto (todos los subíndices hacen referencia al mismo instante de tiempo).

Restricción tecnológica intertemporal: función de producción y ecuación de acumulación de capital

- En el caso más habitual, la función de producción intertemporal a la que se enfrenta la empresa no es sino la función de producción proveniente de la teoría microeconómica estática, es decir, funciones de producción neoclásicas de buen comportamiento ($y_t(z_t)$). En consecuencia, esta restricción no aportaría carácter estrictamente intertemporal al problema, por lo que el análisis dinámico de la empresa seguiría siendo irrelevante la estrategia óptima intertemporal se reduciría a optimizar el beneficio de manera "miope", período a período, sin necesidad de preocuparse por el conjunto del horizonte temporal[37].

- Como consecuencia, para hacer del problema de la producción un problema auténticamente intertemporal, es necesario introducir algún tipo de elemento en la función objetivo o en la restricción de la empresa.
  - Estos elementos suelen consistir en la incorporación de una o varias ecuaciones de estado que reflejen la acumulación de los factores.
    - Desde un punto de vista matemático, esto se refleja en la incorporación de una ecuación de estado al problema de producción intertemporal.
    - Desde un punto de vista económico-aplicado, esto significa que la empresa ya no paga el alquiler de aquellos servicios factoriales que incorporan en la ecuación de estado, como sucede en el análisis estático, sino que pasa a ser propietaria del stock del factor en cuestión. Por ello, la empresa debe afrontar el pago de su precio de adquisición (coste explícito) pero también incurrirá en un coste de depreciación del mismo y en un coste de oportunidad (coste implícito), lo que le obligará a incurrir recurrentemente en nuevas adquisiciones a fin de compensar las mermas debidas a la depreciación.
    - Sin embargo, los resultados que se alcanzan son muy similares a los del análisis estático[38].

[37] Esta situación surge porque la empresa de la teoría neoclásica carece de restricción presupuestaria, posiblemente porque se considera que sólo después de obtenida la producción, remunera a los factores productivos. De no ser así, si la empresa tuviera que ahorrar para hacer frente al pago de los factores, la situación sería similar al problema del consumo.

[38] En efecto, sólo varía parcialmente la CPO referida al capital, que típicamente supone que el valor de la productividad marginal del capital debe igualarse con un nuevo indicador que se denomina coste de uso, el cual incorpora la tasa de depreciación. En el modelo neoclásico de inversión, esta CPO es:

$$p \cdot f'(k_t) = p_k \cdot (r + \delta)$$

– En otros casos se introducen elementos *ad hoc* para tratar problemas económicos muy concretos y sirven para explicar algún aspecto relevante de la conducta de las empresas como los que se analizarán a continuación.

1.2.2. Aplicaciones

Modelo de "Robinson Crusoe" (Fisher-Hirshleifer). Teorema de separación en empresas

Idea

- Un análisis enriquecido procedería de combinar en un mismo agente la decisión de consumo y de producción intertemporales.
  – Esto se logra con el agente *consumidor-productor* o *"Robinson Crusoe"*, de manera que interesa saber hasta qué punto la combinación de una decisión inherentemente intertemporal (consumo-ahorro) con otra que no lo es (inversión) haga que esta última adquiera dicho carácter intertemporal. Sin embargo, al igual que se vio con el modelo de capital humano, ambas decisiones pueden ser independientes (teorema de separación) bajo ciertos supuestos.

Modelo

Supuestos

- Los componentes del modelo (en tiempo discreto) son los siguientes. En primer lugar, como novedad aparece la función de producción neoclásica, idéntica a la de la teoría estática pero suponiendo para este modelo que depende de un factor productivo, el capital ($y_t(k_t)$) y exhibe rendimientos decrecientes respecto del mismo. La característica fundamental de la tecnología en este modelo tan simple y que no debe perderse de vista es que existe un único bien, que se utiliza tanto para producir (en ese caso se le llama inversión cuando es un flujo y capital cuando es un fondo acumulado) como para consumir (en ese caso se le llama consumo). Es el mismo bien en todos los caso, pero con diferente denominación en función de la finalidad que se le dé.

- La actividad productiva genera la demanda de capital, proviniendo su oferta de la decisión de ahorro-consumo. En este sentido, el elemento que va a convertir el problema de producción en genuinamente intertemporal es que este capital se acumula según una regla que parte del *stock* de capital preexistente (k_t), minorado por la depreciación a tasa constante (δ) y aumentado por la inversión bruta (i_t):

$$k_{t+1} = (1 - \delta) \cdot k_t + i_t$$

- La decisión de consumo es similar a la del problema de ahorro-consumo, con la misma función objetivo de maximización de la utilidad, pero con diferencias en la restricción de recursos. En efecto, ahora el ahorro puede consistir en acumular capital productivo que, al igual que el capital financiero, permite trasladar renta de un período a los siguientes, pero a diferencia de aquél no permite traer renta futura al presente. Podrían darse dos casos: uno en el que sólo se pueda acumular capital (o sin mercados de capital) y otro en el que se permita simultáneamente acumulación de capital y acceso al préstamo y endeudamiento (o con mercados de capital) sin restricción alguna.

Desarrollo

- La especificación del modelo en tiempo discreto y horizonte finito, con carácter genérico (válido para ambos casos) sería:

$$\max_{\{c_t,i_t\}} \quad V(c) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \cdot u(c_t) = \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t \cdot u(c_t)$$

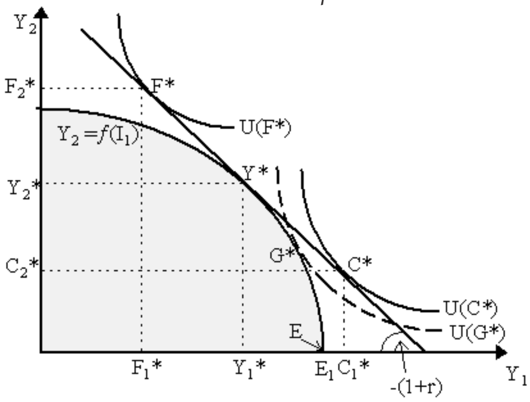
$$s.a \quad \begin{cases} (k_{t+1}-k_t) + (b_{t+1}-b_t) = y_t + r_t \cdot b_t - c_t \\ k_{t+1} = (1-\delta)\cdot k_t + i_t \\ y_t = f(k_t) \\ b_0 = B, b_T = 0 \\ k_0 = K, k_T = 0 \end{cases}$$

- El caso sin mercados de capital es aquel en que $s_t = 0, \forall t$, de modo que no se tiene acceso a los mercados de capital y sólo se puede llevar renta hacia adelante a través de la inversión real. Y el caso con mercados de capital es el de la especificación general.
- La resolución del problema pasa por determinar las condiciones de óptimo de primer orden, respecto de las variables consumo e inversión.
  - En el caso del modelo *sin mercados de capital* ($b_t = 0, \forall t$), se obtiene la condición de optimalidad:

$$\underbrace{1 + f'(k_t) - \delta}_{\left|RMTI_{c_t}^{c_{t+1}}\right|} = \underbrace{\frac{u'(c_t)}{\beta \cdot u'(c_{t+1})}}_{\left|RMSI_{c_t}^{c_{t+1}}\right|}$$

    - En palabras, esta condición indica que la tasa neta a la que se puede trasladar renta de un período a otro invirtiendo (o relación marginal de transformación intertemporal ($\left|RMTI_{c_t}^{c_{t+1}}\right| = 1 + f'(k_t) - \delta$)) debe igualarse en el óptimo a la tasa a la que se está dispuesto a sustituir consumo entre períodos (o relación marginal de sustitución intertemporal ($\left|RMSI_{c_t}^{c_{t+1}}\right| = \frac{u'(c_t)}{\beta \cdot u'(c_{t+1})}$).
    - En términos gráficos (para el caso de dos períodos), la dotación de que se parte se encuentra en un punto sobre la frontera de posibilidades de producción o FPP (determinada por la función de producción, y que será cóncava respecto al origen por los rendimientos decrecientes[39]). La condición representa la tangencia entre la FPP y la pendiente de la curva de indiferencia más elevada, es decir, la coincidencia en el mismo punto de las pendientes de ambas curvas, RMTI y RMSI. Nótese que la frontera de posibilidades de consumo o FPC coincide en este caso con la FPP. Se trataría del punto *G** del gráfico de la Imagen 3.

IMAGEN 3.– *Teorema de la separación de FISHER*



Fuente: https://www.hetwebsite.net/het/essays/capital/fisherinvest.htm

[39] La FPP puede en principio ser cóncava, linear o convexa:
- Con *rendimientos decrecientes a escala* será estrictamente cóncava.
- Con *rendimientos constantes a escala* será estrictamente cóncava, salvo en el caso en el que las intensidades factoriales sean iguales en ambos sectores (en cuyo caso será linear).
- Con *rendimientos crecientes a escala* podrá ser convexa.

- En este caso, es evidente que las decisiones de inversión y de consumo está íntimamente relacionadas, de modo que inversión (y producción) deviene una decisión plenamente intertemporal. No se cumple, por tanto, el principio de separación.

– Sin embargo, en el caso del *modelo con mercados de capital*, se obtienen dos condiciones de óptimo independientes:

a) Por un lado, se alcanza la ecuación de Euler para la variable consumo (igualación entre RMSI y factor de capitalización):

$$\underbrace{\frac{u'(c_t)}{\beta \cdot u'(c_{t+1})}}_{\left|RMSI_{c_t}^{c_{t+1}}\right|} = 1 + r$$

b) Por otro lado, se alcanza la condición de primer orden para la inversión:

$$\underbrace{1 + f'(k_t) - \delta}_{\left|RMTI_{c_t}^{c_{t+1}}\right|} = 1 + r$$

- Su interpretación económica es directa: se invertirá hasta el punto en que se iguale la rentabilidad neta de dicha inversión (dada por la productividad marginal del capital neta de depreciación) con su coste marginal en términos de oportunidad (dado por el tipo de interés del mercado de capital). Lo que indica que **las decisiones de inversión**, en este caso, **no se ven afectadas por las decisiones de consumo**. Es lo que se conoce como *"teorema de separación de Fisher"* (HIRSHLEIFER)[40], y no es sino un caso muy similar al expuesto por ACEMOĞLU y AUTOR en el análisis del capital humano, pues aquí también tenemos acceso a mercados de capital perfectos y ausencia del factor trabajo. Por tanto, Robinson Crusoe puede dividir su proceso de decisión en 2 etapas:
  1) Primero optimiza su decisión de inversión, decidiendo qué parte de su dotación inicial de recursos dedica a invertir en capital productivo (y por ende cuanto produce) dado el tipo de interés de mercado, con lo que maximiza sus recursos disponibles.
  2) Y en segundo lugar decide, dados dichos recursos y el acceso al mercado de capital, cuánto consume y cuánto ahorra o se endeuda. El resultado del acceso al mercado de capitales será típicamente una ganancia de bienestar, como puede observarse. La razón última se halla en que el mercado de capitales es más potente a la hora de trasladar rentas entre períodos que la sola tecnología productiva, pues mientras esta permite únicamente llevar recursos del presente al futuro, el mercado de capital también permite lo contrario, traer recursos futuros al momento presente (vía endeudamiento).

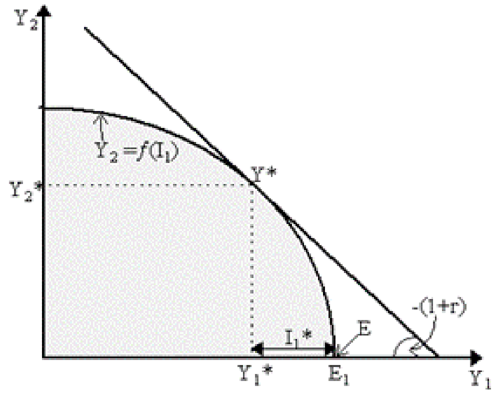
- En términos gráficos, en la primera etapa el agente decide el nivel óptimo de inversión (distancia horizontal entre el nivel máximo de producción en el período *1* y el punto de tangencia con la restricción presupuestaria intertemporal), pues en ese punto de la FPP su RMTI es tangente a la pendiente de la restricción presupuestaria. Dada dicha producción (en 1 y en 2, pues la inversión está decidida), el agente pasa a optimizar el consumo, siendo su FPC la "recta de balance" dada por el mercado de capitales.
  - En función de cómo sean las preferencias tendremos uno u otro equilibrio en el consumo, pero en cualquier caso posible, el equilibrio en la producción será el mismo, demostrando así gráficamente el teorema de la separación.

[40] Este "teorema" cuenta con una segunda parte, según la cual también es independiente la decisión de inversión respecto de la decisión de financiación de la misma, aunque esto es resultado más bien de suponer un mercado de capital perfecto o sin restricciones.

- Además, Robinson Crusoe obtiene un mayor nivel de bienestar con mercados de capitales que en su ausencia, lo que se ve reflejado en que alcanza una curva de indiferencia más alejada del origen. Esto se explica por el hecho de que la FPC amplía la FPP[41].

Implicaciones

IMAGEN 4.– *Frontera de inversión de FISHER*



Fuente: https://www.hetwebsite.net/het/essays/capital/fisherinvest.htm

Extensiones

- Hasta aquí hemos analizado un modelo muy básico que admite muchas extensiones y ha sido ampliamente utilizado en la literatura económica con diversos fines.
  – Sirve para analizar *restricciones de liquidez*.
  – Ha sido utilizado en ámbitos como el *comercio internacional* para entender los determinantes del comercio (modelo de HABERLER (1936) [ver tema 3.B.5]) o la *macroeconomía abierta* (modelo intertemporal de la balanza de pagos de OBSTFELD y ROGOFF (1995) [ver tema 3.B.12]).

Costes de ajuste (modelo de la *q* de TOBIN): el concepto de precio sombra [Tema 3.A.34]

Una manera alternativa de alcanzar un modelo de producción genuinamente intertemporal consiste en modificar la función objetivo[42] (tecnología) para que incorpore características que liguen las decisiones de producción en un período con las decisiones en períodos distintos. Un caso típico lo constituye la utilización de una función de costes específica que incorpore los denominados costes de ajuste de los factores productivos. Los costes de ajuste (de los factores) se definen como aquellos costes en los que la empresa debe incurrir por el mero hecho de modificar la cuantía de dichos factores de un período al siguiente. Como se intuye, esta función de costes es genuinamente intertemporal y no podría existir en un contexto estático. Estos costes de ajuste se suelen clasificar en costes internos (por la incorporación en el seno de la empresa de los nuevos activos o factores) y externos (por el aumento de los precios de dichos activos o factores ante incrementos en su demanda).

A continuación se ilustrará el problema de los costes de ajuste con un caso específico de costes de ajuste internos referidos al capital. Casos análogos pueden encontrarse en el ajuste del factor trabajo con un tratamiento metodológico similar.

Sea una empresa precio-aceptante en todos los mercados, en condiciones de información perfecta y perfecta certidumbre y cuyo objetivo en el horizonte temporal T es la maximización del beneficio. Éste es la diferencia entre los ingresos, derivados de la venta de un bien (Y_t con precio P_t) y fabricado con tecnología de rendimientos constantes que requiere dos factores, capital y trabajo ($Y_t = F(K_t, L_t)$), y los costes, derivados del factor trabajo, cuyo alquiler es W_t, y del capital, que es propiedad de la

[41] Solamente hay un caso en que Robinson no mejorará y mantendrá su nivel de bienestar constante: cuando la curva de indiferencia de Robinson sea tangente a la recta de balance en el mismo punto en que esta es tangente a la FPP.

[42] Generalmente, los costes de ajuste se suelen incorporar en la función objetivo de beneficio, pero se pueden alcanzar resultados equivalentes incorporándolos en la ecuación de estado de acumulación de capital.

empresa[43] y cuya variación bruta o inversión bruta (I_t) se adquiere a precio unitario P_t^I y supone adicionalmente unos costes de ajuste $\varphi(I_t)$ crecientes y convexos. Asimismo, este capital se deprecia de manera continua a tasa constante δ.

El problema de optimización en tiempo continuo quedaría:

$$\max_{\{L_t,I_t\}} \quad \Pi(y) = \int_0^T e^{-r\cdot t}\cdot \pi(Y_t)dt = \int_0^T e^{-r\cdot t}\cdot \left[P_t\cdot Y_t - W_t\cdot L_t - \left(P_t^I\cdot I_t + \varphi(I_t)\right)\right]dt$$

$$s.a \quad \begin{cases} \dot{K}_t = I_t - \delta\cdot K_t \\ Y_t = F(K_t,L_t) \\ K_0 = K\,;\, K_T = 0 \end{cases}$$

Aplicando el principio del máximo de Pontryagin y utilizando el hamiltoniano valor corriente[44], se le aplican las condiciones necesarias de primer orden. De las mismas se obtienen tres condiciones de óptimo, dos estáticas referidas a las dos variables de control (trabajo e inversión) y una dinámica referida a la variable de estado (capital):

$$P_t\cdot\frac{\partial F}{\partial L_t} = W_t$$

$$q_t = P_t^I + \varphi(I_t)$$

$$\dot{q}_t = q_t\cdot(r+\delta) - P_t\cdot\frac{\partial F}{\partial I_t}$$

La primera condición no necesita explicación, es la tradicional igualación entre el valor de la productividad marginal y remuneración del trabajo del análisis estático. Pero las dos siguientes condiciones ya son relevantes en el análisis dinámico, pues son un perfecto ejemplo del uso e interpretación de una herramienta fundamental de dicho análisis, la variable de coestado o precio sombra (q_t). El término precio "sombra" hace referencia a precios o valoraciones, que son a priori desconocidos o no disponibles en los mercados, de ciertos elementos (las variables de estado) desde la perspectiva interna del agente optimizador (consumidor, empresa o planificador social), esto es, considerando todos los beneficios y todos los costes que para el mismo supone dicho elemento. En términos matemáticos y por extensión del análisis estático, la variable de coestado sería el equivalente del multiplicador de Lagrange, en versión dinámica (ahora es una función, no un valor) pero con similar interpretación: mide cuánto se incrementa la función objetivo al relajar o variar marginalmente en t la restricción o ecuación de movimiento asociada, o lo que es lo mismo, al variar marginalmente en t la variable de estado desde t hasta T. En este problema de costes de ajuste, q_t mide por tanto cuánto varía el beneficio intertemporal (en todo el horizonte de optimización) derivado de relajar o variar marginalmente el capital desde t hasta T. Y recordando que se ha utilizado el hamiltoniano valor corriente, este precio sombra no está valorando en términos del momento inicial (como lo estaría si se tratara del hamiltoniano valor presente), sino en términos del momento t[45].

Así, la segunda de las condiciones establece que el precio sombra de una unidad adicional de capital para la empresa debe ser no sólo el precio de adquisición pagado o coste externo (precio de mercado

[43] La diferencia con el problema de maximización de beneficio neoclásico habitual estriba en que el capital no es externo a la empresa (la empresa no lo "alquila" a cambio de remuneración), sino que es propiedad de la empresa.

[44] En un problema con factor de descuento ($e^{-r\cdot t}$) en la función objetivo, éste aparece en el hamiltoniano al ser parte de la misma, lo que hace que dicha función (hamiltoniana) esté expresada en términos de valor del momento de actualización, es decir, hoy, de ahí el nombre "hamiltoniano valor presente". Si multiplicamos todo él por $e^{r\cdot t}$, dentro del hamiltoniano el factor de descuento que acompaña a la función objetivo se anula, pero aparece en las ecuaciones de estado, que haciendo un cambio de variable conveniente en la(s) variable(s) de coestado asociada(s) ($\lambda_t\cdot e^{r\cdot t} = \mu_t$), vuelve a desaparecer. Este cambio hace que el hamiltoniano no esté expresado en valores del instante inicial ($t = 0$), sino en valores del instante t, de ahí que se denomine "hamiltoniano valor corriente". Este cambio también modifica ligeramente algunas de las condiciones de primer orden, necesarias de óptimo (respecto de las variables de estado).

[45] En este problema de costes de ajuste, si el precio sombra de la inversión del hamiltoniano en valor presente fuese λ_t, recuérdese que $\lambda_t\cdot e^{r\cdot t} = q_t$, esto es lleva o capitaliza el valor de λ_t, por definición en el momento inicial, al momento t.

de la inversión) sino también el coste marginal de ajuste, es decir, el coste interno de instalarlo. O lo que es lo mismo, el precio de mercado de la inversión deja de ser la señal relevante para la empresa en presencia de costes de ajuste.

Y la tercera condición, la condición dinámica, que puede reordenarse e interpretarse de múltiples formas[46], establece que la evolución de esta valoración interna del capital ($\dot{q}_t$) debe coincidir en el óptimo con su coste de uso ($q_t \cdot (r + \delta)$), que es a su vez un coste explícito de depreciación y el coste de oportunidad reflejado en el tipo de interés como rentabilidad alternativa exigible a cualquier inversión, costes a los que debe sustraerse el beneficio que supone el valor de la productividad marginal que el capital instalado proporciona ($P_t \cdot \frac{\partial F}{\partial I_t}$).

Explotación de recursos naturales: la regla de HOTELLING y las limitaciones del análisis estático

Idea

- Un tipo de decisiones empresariales donde el análisis intertemporal es insoslayable es el de la **gestión de los recursos naturales**.
- La **economía de los recursos naturales** es la rama de la economía ambiental que analiza una de las funciones del medio ambiente, la provisión de recursos naturales como inputs productivos [ver tema 3.B.31], y estudia la gestión y explotación óptima de dichos recursos utilizando las herramientas de la economía neoclásica.
  - Es por ello, que la economía de los recursos naturales va a contemplar y modelizar dichos recursos de manera análoga a los factores de origen humano no naturales (trabajo y capital), por lo que aquellos serán tratados, en esencia, como un tipo de activo.
  - Los recursos naturales suelen ser clasificados en 2 categorías[47]:
    - **Recursos flujo** (bienes no económicos); y
    - **Recursos fondo o stock** (bienes económicos por su finitud).
      - La gestión de recursos naturales de tipo stock posee **carácter genuinamente intertemporal**, ya que la utilización de los mismos que se haga en un período de tiempo condiciona la utilización en períodos posteriores, tanto si son recursos no renovables (donde su uso tiene carácter irreversible), como si son renovables (donde su uso debe tener en cuenta las posibilidades de regeneración).

Desarrollo

- Esto puede verse con un ejemplo de optimización dinámica de la extracción de un recurso no renovable (mineral), cuya disponibilidad total es fija y cuyo precio varía a lo largo del tiempo, de ahí que debe elegirse cuidadosamente la estrategia temporal de extracción.

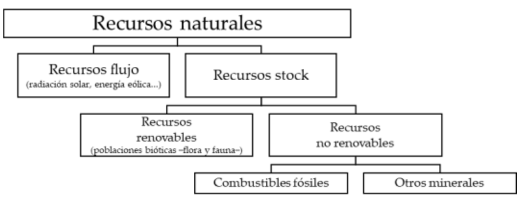
---

[46] Esta condición puede ser expresada en términos de rentabilidades e interpretada como una condición de arbitraje del capital instalado:

$$\frac{\dot{q}_t + P_t \cdot \frac{\partial F}{\partial I_t}}{q_t} = r + \delta$$

La rentabilidad del capital instalado, medida como la suma del valor de su productividad marginal más su revalorización interna ($\dot{q}_t$), en relación a dicho valor interno, debe igualarse con su coste de uso.

[47] Los recursos flujo son aquellos que se presentan como un flujo periódico infinito cuya utilización hoy no afecta a la disponibilidad del mismo mañana (radiación solar, viento…). Por tanto, ni siquiera son recursos económicos. Los recursos fondo son los que tienen una cuantía total definida en un momento del tiempo, de modo que su grado de utilización en un momento tiene implicaciones sobre su disponibilidad posterior. Este tipo de recursos stock puede dividirse, a su vez, en renovables y no renovables. Los recursos renovables son aquellos que pueden crecer y regenerarse biológicamente (animales y vegetales) mientras que los no renovables no existe reproducción natural (salvo a escalas de tiempo geológico), por lo que su uso en el presente implica menor uso en el futuro (combustibles fósiles y otros minerales).



- Supongamos una empresa, j, en condiciones de competencia perfecta (precio-aceptante), copropietaria de un yacimiento mineral de tamaño $\bar{S}$ con el objetivo de maximizar su beneficio intertemporal que proviene de la venta del mineral extraído en cada período ($R_{j,t}$) multiplicado por su precio (P_t), que toma como dado, y minorado por los costes de extracción (que suponemos crecientes y con coste marginal constante, $C_t(R_{j,t})$, $\partial C_t(R_{j,t})/\partial R_{j,t} = c' > 0$). El stock de recurso de partida es $\bar{S}$, y en un instante cualquiera es S_t y su variación instantánea ($\dot{S}_t$) no es más que la suma de las cantidades extraídas por las J empresas en dicho instante ($-\sum_{j=1}^{J} R_{j,t}$). Se asume que el recurso se agotará al finalizar el período. Por lo tanto, el problema de control óptimo sería:

$$\max_{\{R_{j,t}\}} \quad \pi_j = \int_0^T e^{-r \cdot t} \cdot \pi_{j,t} \, dt = \int_0^T e^{-r \cdot t} \cdot \left[P_t \cdot R_{j,t} - C_t\left(R_{j,t}\right)\right] dt$$

$$s.a. \quad \begin{cases} \dot{S}_t = -\sum_{j=1}^{J} R_{j,t} \\ S_0 = \bar{S} \\ S_T = 0 \end{cases}$$

  - Aplicando el principio del máximo de Pontryagin y utilizando el hamiltoniano valor corriente, se aplican las condiciones necesarias de primer orden. De las mismas se obtienen 2 condiciones de óptimo, una estática y otra dinámica:

$$P_t - \frac{\partial C_t\left(R_{j,t}\right)}{\partial R_{j,t}} = \lambda_t$$

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = r$$

    - La 1ª ecuación es la *condición de óptimo estática* y establece que el precio neto de mercado (precio bruto de mercado menos coste marginal de extracción) se iguala con la variable de coestado o precio sombra. Esto implica que en el óptimo el precio sombra o valor marginal de los recursos desde la perspectiva interna de la empresa, que debe ser estrictamente positivo, es dicho precio neto o *royalty*. Esto supone una clara diferencia con el análisis estático, donde el beneficio marginal de la empresa competitiva debe anularse en el óptimo.
      - Lo interesante para el análisis dinámico aquí es que si tenemos un precio bruto superior al coste marginal, ¿es posible que una empresa obtenga beneficios económicos en competencia perfecta? La respuesta es no, y esto es importante por ser un claro ejemplo de cómo, en ocasiones, aplicar el análisis estático en contextos dinámicos puede originar conclusiones erróneas.
    - Para clarificarlo hay que acudir a la segunda de las condiciones necesarias, la *condición dinámica de óptimo*, recurrente en la economía de los recursos naturales y conocida como

regla de Hotelling[48]. Esta regla determina, aplicando la igualdad anterior, que la tasa de crecimiento del precio neto o *royalty*, es el tipo de interés.

$$\left.\begin{array}{r}\underbrace{P_t - \dfrac{\partial C_t(R_{j,t})}{\partial R_{j,t}}}_{p_t} = \lambda_t \\ \dfrac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = r\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\dot{p}_t}{p_t} = r$$

- Esto significa que el precio neto de mercado del recurso crece a una tasa igual al tipo de interés, pero no implica que una empresa en competencia perfecta tenga beneficios extraordinarios y crecientes[49].

Implicaciones

- Como ya se adelantó, la economía de los recursos naturales trata a los mismos como un activo cualquiera, por lo que la *regla de Hotelling* establece que la empresa decide en cada momento si extrae el recurso (obteniendo a cambio el precio neto que puede ser invertido en el mercado de capital con rentabilidad r) o mantiene el recurso en el yacimiento, a la espera de una posible revalorización, neta de costes de transacción ($\dot{p}_t/p_t$).
  - Extraerá el recurso cuando la rentabilidad del mercado de capital sea superior a la revalorización, y viceversa. La regla de Hotelling no es sino una condición de arbitraje.
  - Por tanto, no hay tales beneficios extraordinarios de la empresa competitiva, ni siquiera en el sector de los recursos no renovables[50].
    - Ese *royalty* o precio neto estrictamente positivo **no es beneficio económico**, sino que **cubre un coste implícito o coste de oportunidad del recurso natural, que es la rentabilidad alternativa a la actividad extractiva que podría obtenerse en el mercado de capital** y que sólo puede ser explicado aplicando el análisis intertemporal.
- Este resultado trasciende el ámbito del sector de los recursos naturales, pues *puede aplicarse a la hora de analizar los beneficios económicos de cualquier empresa superando las limitaciones del análisis estático*.
  - En efecto, en el ámbito de los costes financieros y desde una óptica dinámica se deben computar siempre los costes de oportunidad alternativos que tienen los recursos comprometidos de una empresa, lo que lleva a diferenciar entre costes contables (que sólo recogen costes explícitos de financiación ajena) y costes económicos (que adicionalmente consideran costes de financiación propia, exigibles a empresas similares).

2. APLICACIÓN MACROECONÓMICA

2.1. Los modelos de agente representativo en macroeconomía

- Sin duda, una de las aplicaciones más importantes del análisis intertemporal en el pasado reciente ha sido su incorporación al análisis macroeconómico a través de la fundamentación microeconómica de los fenómenos macroeconómicos, hasta el punto de que se ha convertido en la metodología casi exclusiva y origen de uno de los caballos de batalla más utilizados en la materia, los **modelos de equilibrio general dinámico y estocástico** (EGDE o *DGSE*, por sus siglas en inglés).

---

[48] Debido al trabajo pionero de HAROLD HOTELLING, *The economics of exhaustible resources* (1931).

[49] De combinar ambas condiciones de primer orden puede extraerse una interpretación económica del óptimo alternativa y no menos interesante puesto que puede extenderse a competencia imperfecta (monopolio). La sencilla ecuación diferencial que representa la regla de Hotelling, tiene como solución $\lambda_t = \lambda_0 \cdot e^{rt}$, luego el precio sombra en cualquier instante tiene el mismo valor descontado, $\lambda_t \cdot e^{-rt} = \lambda_0$, que es una constante. En consecuencia, el beneficio marginal de cualquier instante descontado también se iguala a dicha constante λ_0 y, por tanto, los beneficios marginales descontados se igualan entre sí. La regla general de optimización dinámica de cualquier empresa (competitiva o monopolista) es la igualación de los beneficios marginales descontados de cualesquiera dos instantes de tiempo.

[50] Adicionalmente se podría argumentar (PERLOFF, 2012) que dicho margen sobre el coste marginal en presencia de un recurso no renovable es una renta ricardiana o renta de escasez, definida como el pago por encima del mínimo necesario (coste marginal) para que el bien sea ofertado, pues el recurso tiene una oferta absolutamente limitada y carece de usos alternativos, pero no una renta de monopolio o beneficio extraordinario. Asimismo, si el sector opera en condiciones de competencia perfecta con libertad de entrada, esta escasez no podría por sí sola sostener beneficios extraordinarios.

2.1.1. Repaso histórico

- Haciendo un poco de historia, la propia **idea de agente representativo** surgió con la propia "revolución marginalista" de la mano de WILLIAM STANLEY JEVONS y los *trading bodies* de su teoría del intercambio (*Theory of Political Economy* (1871)), defendidos por FRANCIS YSIDRO EDGEWORTH mediante el *representative particular* del filósofo inmaterialista GEORGE BERKELEY.
- ALFRED MARSHALL crearía explícitamente un agente representativo más sofisticado, la "empresa representativa", en sus *Principles of Economics*. Su utilización se mantuvo muy limitada y pese al apoyo de economistas como A.C. PIGOU o D.H. ROBERTSON, el virulento ataque a dicho concepto de parte de L. ROBBINS en 1928 hizo que quedara absolutamente relegado.
- No sería hasta la célebre crítica de R. LUCAS (1976)[51], que la búsqueda de relaciones macroeconómicas genuinamente estructurales desencadenase el proceso, que se extiende hasta la actualidad, de *fundación microeconómica* o *"microfundamentación" de los modelos macroeconómicos*. En efecto, la estrategia consiste en buscar modelos "robustos" en el sentido de rastrear los determinantes últimos, los fundamentos estructurales del modelo económico, a saber, preferencias, dotaciones y tecnología.
  - Sin embargo, este enfoque desde su inicio se topó con la dura realidad, sobre todo cuando la ambición llevó a modelizar el conjunto de una economía, esto es, a intentar utilizar modelos de equilibrio general walrasiano[52]. Y es entonces cuando se impone el recurso al agente representativo, gracias al cual se consiguen modelos "tratables"[53] a costa de eliminar la complejidad derivada de la heterogeneidad entre agentes de un mismo tipo.

2.1.2. Definición de agente representativo

- Por tanto, sería necesario definir el **concepto de agente representativo**. Curiosamente, su definición suele variar entre modelos (a veces ni siquiera se especifica) y puede referirse a los siguientes casos:
  i. A un agente real cualquiera, si todos los agentes de la colectividad son idénticos;
  ii. A un agente individual "medio" de una colectividad de agentes; o
  iii. A un agente, posiblemente ficticio, cuyo comportamiento coincide exactamente con el comportamiento de la colectividad[54].
- Esta última definición puede ser la más apropiada. Como consecuencia, en los modelos macroeconómicos, el agente representativo debería ser un consumidor o un productor "tipo", cuyas decisiones coincidan con las decisiones agregadas del conjunto de la colectividad a la que representa.

2.1.3. Tipos de modelo de agente representativo

- Los modelos de agente representativos pueden clasificarse en 2 grandes **categorías**:
  - <u>*Modelos de horizonte infinito*</u> (MHI): Se trata de un agente que vive infinitos periodos, por lo que también son conocidos como modelos de agentes de vida infinita (*infinitely-lived agent models*);

---

[51] R. LUCAS expuso las deficiencias de las estimaciones de los efectos de política económica basadas en relaciones macroeconómicas pasadas, por no ser dichas relaciones estructurales o invariantes ante los propios cambios de política. No obstante, se suele citar el análisis de la oferta intertemporal de trabajo de LUCAS y RAPPING de 1969 como primer uso moderno del agente representativo.

[52] En un modelo de equilibrio general walrasiano interactúan una pluralidad (diversa) de consumidores y empresas en múltiples mercados de manera simultánea. Un modelo de equilibrio general auténtico, por muy simplificado que esté, resulta intratable por su complejidad, razón por la cual ni siquiera se presta a ejercicios de estática comparativa.

[53] Por "tratable" se quiere decir modelos que permitan llegar a algún tipo de resultados o conclusiones de validez general, esto es, a modelos matemáticos con solución analítica o una aproximación a esta.

[54] La primera definición es teóricamente cierta pero supone casos irreales. La última definición sería la más genérica y válida, pero nos llevaría necesariamente a la pregunta de cuándo es teóricamente legítima dicha representación. Por desgracia, salvo para el caso de consumidores cuyas preferencias originen una función indirecta de utilidad de la forma Gorman (que se da con preferencias cuasilineales y con preferencias homotéticas, por ejemplo), dicha agregación de conductas a través de agente representativo no puede asegurarse.

– *Modelos de generaciones solapadas* (MGS): Un agente vive un número finito de periodos, pero será sucedido y coincidirá en las últimas etapas de su vida por otro idéntico, produciéndose una sucesión infinita de agentes[55].

- Aunque hay grandes similitudes entre estos dos tipos de modelos (agentes, resolución, equilibrios, etc.), poseen diferentes implicaciones positivas y normativas y cada uno permite analizar un tipo de problemas que no lo permite el otro.

2.2. Modelos de horizonte infinito

2.2.1. *Definición y rasgos fundamentales*

- Los **modelos de horizonte infinito (MHI)** son aquellos en que el agente representativo vive infinitos períodos, por lo que el horizonte de optimización no queda acotado.
  – Este carácter infinito del horizonte de planificación sería razonable para las *empresas* (tal y como refleja el *principio de empresa en funcionamiento* [ver tema 3.B.1]).
  – Sin embargo, el horizonte infinito parece *a priori* poco razonable para los *consumidores*. En este caso no tendría por qué entenderse de manera literal, sino que podría racionalizarse de maneras alternativas:
    - o Indicando simplemente que infinito equivale a lo *suficientemente alejado en el tiempo* e incluso lo suficientemente incierto en su momento final.
    - o Indicando que en realidad, por comparación con los MGS, no se trata de un único agente sino de una *dinastía de agentes de vidas finitas con «altruismo intergeneracional puro»*.

- Los **rasgos fundamentales** que caracterizan los MHI son:
  1. *Inmunidad a la "crítica de Lucas"*. Es su razón de ser.
  2. *Modelos de optimización dinámica y, en ocasiones, estocástica*, por lo que utilizan el instrumental matemático expuesto a lo largo de la exposición.
  3. *Su resolución puede ser problemática, pero esto no impide obtener conclusiones cualitativas y cuantitativas sobre la conducta óptima de los agentes*:
     a. Se pueden conocer las propiedades del equilibrio sin necesidad de resolver el problema a través de la sola inspección de las condiciones de primer orden y, si es necesario, su diferenciación para ver cómo afecta a una variable la modificación de algún parámetro (estática comparativa).
     b. En ciertos casos, el supuesto de competencia perfecta y la ausencia de todo tipo de fricciones o fallos de mercado hace que el equilibrio sea eficiente en el sentido de Pareto. En el plano técnico, esto presenta la ventaja de que el óptimo de Pareto puede ser más fácil de encontrar que el equilibrio competitivo (de entrada, el óptimo de Parteo carece de precios, por lo que el número de incógnitas se reduce significativamente). Esto permite determinar la asignación del equilibrio competitivo encontrando la asignación Pareto-óptima y después encontrar el vector de precios que lo sostenga.
     c. En ocasiones se puede resolver el modelo de manera restringida, es decir, imponiendo alguna restricción al equilibrio final que lo simplifique. El caso más habitual es el concepto de equilibrio de estado estacionario, entendido en sentido amplio como aquel en que las variables relevantes crecen a una tasa constante. Esto suele simplificar enormemente las condiciones de primer orden y permite encontrar el equilibrio, aunque a costa de restringir la calidez de dicho equilibrio al lago plazo al que podría tender el modelo. Asimismo, esto permite analizar gráficamente este tipo de modelos a través de los diagramas de fases. Y no conviene olvidar que este tipo de equilibrios no es el único

[55] Por lo tanto, típicamente en los MHI se podría hablar de que el número de agentes es finito pero su vida infinita, mientras que lo opuesto sucede con los MGS, donde la vida es finita pero el número de agentes se suceden es infinito. Un tipo de modelo que combina ambas características: P. WEIL, *Overlapping families of infinitely-lived agents*, Journal of Public Economics 38 (1989) 183-198.

posible del modelo, aunque con horizonte infinito los modelos típicamente (no siempre) tenderá a este tipo de equilibrios a lo largo de las denominadas "dinámicas de transición".

d. Sin embargo, en ocasiones ni siquiera esto es factible, por lo que se puede optar por resolver el modelo por métodos numéricos. Esto puede requerir elegir "adecuadamente" los parámetros del modelo a través de un ejercicio de calibración, así como una ligera transformación del modelo original, por norma general altamente no lineal, en otro linealizado en el entorno de la solución de equilibrio, de modo que sea más fácil de resolver. Esto permite realizar ejercicios de estática comparativa en términos puramente numéricos a través de funciones de respuesta al impulso que permiten ver la transición de las asignaciones o precios de equilibrio hacia un nuevo equilibrio ante variaciones de los parámetros. El problema reside en que, aun realizándose todo este proceso de manera óptima, las conclusiones se restringen al caso concreto analizado (cuando el vector de parámetros toma unos determinados valores), careciendo por tanto de validez general y arrojando muy poca luz sobre los mecanismos, procesos de ajuste óptimos y el razonamiento económico que hay detrás de dichas respuestas.

4. *Permite realizar análisis de bienestar*. Permite comparar diferentes situaciones y valorar medidas de política económica.

2.2.2. *Modelización típica de agentes*

Consumidores: el hogar representativo

- Se modeliza el problema de un hogar representativo, lo que simplifica el problema de modo que sólo es necesario un único problema de optimización.
- Como explica ACEMOĞLU (2008), **la mayoría de los modelos no admite hogar representativo**. Esto es consecuencia un célebre resultado de la teoría del equilibrio general, el *teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu*, que demuestra que los comportamientos optimizadores que se imponen a los hogares individuales en general no restringen (ni mucho menos se trasladan) a la demanda agregada. La razón que hay detrás de esta dificultad de agregación: los potencialmente fuertes efectos renta derivados de cambios en los precios, pues estos pueden producir serias variaciones en las rentas de los agentes (por ser típicamente rentas dotacionales).
  - Por tanto, cabe señalar que para poder agregar las demandas individuales es necesario imponer unas **condiciones restrictivas**:
    i) Los consumidores toman el precio como dado y sus acciones individuales no lo modifican perceptiblemente.
    ii) Los efectos renta son nulos para cualquier nivel de riqueza y para cualquier individuo (preferencias cuasilineales).
    iii) Independencia de las demandas individuales.
  - No obstante, se da el caso y relevante que permite la agregación a través del hogar representativo: **teorema de agregación de Gorman**. Una condición necesaria y suficiente sería

que la función indirecta de utilidad de todos los agentes de la economía tenga una representación[56] de la forma polar de Gorman[57,58].

- Este tipo de preferencias son condición necesaria y suficiente para la existencia de hogar representativo en sentido positivo y, además, implica la existencia de un hogar representativo en sentido normativo, es decir, cualquier asignación que maximiza la utilidad del hogar representativo será Pareto-óptima (teorema de existencia del hogar representativo normativo).
- Las preferencias que originan una FIU de tipo Gorman vienen, entre otras, de preferencias cuasilineales y homotéticas. Por lo tanto, trabajar con funciones CES, permite la agregación de las funciones de demanda individuales.

Empresas: la empresa representativa

- La existencia de empresa representativa no presenta, a diferencia del hogar, problemas de existencia ya que no existen efectos renta. Para poder agregar el comportamiento de distintas empresas heterogéneas en una única empresa representativa sólo necesitamos 2 requisitos (ACEMOĞLU, 2007):
  a) No existen externalidades en la producción.
  b) Todos los factores se intercambian en los mercados competitivos.
- En el análisis macroeconómico, la función de producción de la empresa representativa toma el relevo de la función de producción agregada de la macroeconomía anterior, siendo habitual que en los modelos exista un único sector productivo con una única función de producción que englobe o agregue el agregado o *composite* de los distintos bienes de la economía.

Sector público

- Una de las deficiencias de los modelos de agente representativo basados en optimización individual es la dificultad que presentan para incorporar al segur público. Si bien los modelos de agente representativo nacieron para solventar las deficiencias de los modelos macroeconómicos anteriores que no tenían en cuenta la respuesta óptima del sector privado a las medidas de política económica, **la incorporación del sector público como un agente más ha sido muy limitada**:
  – *Autoridad monetaria* ✓: Función objetivo más definida y comúnmente aceptada (dada por la estrategia monetaria), lo que hace que encaje mejor en un modelo de agentes optimizadoras que exige que se explicite su regla de comportamiento.
  – *Autoridad fiscal* ✗: Más difícil de modelizar una función objetivo y el destino del gasto público (que habitualmente se supone *pure waste*).

2.2.3. Aplicaciones

- Los MHI pueden utilizarse tanto para analizar de forma parcial comportamientos de un colectivo tomado aisladamente como para analizar el comportamiento y la interacción simultánea de todos los colectivos, típicamente consumidores y empresas, en modelos de "equilibrio general".

---

[56] En ausencia de incertidumbre, transformaciones monótonas crecientes de la utilidad o de la función indirecta de utilidad no tienen efectos sobre el comportamiento, de modo que únicamente se requiere que exista una transformación monótona de la función indirecta de utilidad que tome la forma polar de Gorman.

[57] *Teorema de agregación de Gorman*:
Consideremos una economía con un conjunto de $\mathcal{H}$ hogares. Supongamos que las preferencias de cada hogar $h \in \mathcal{H}$ pueden ser representadas por una función indirecta de utilidad de la forma:

$$V^h\left(\boldsymbol{p},\overline{W}^h\right) = U\left(\boldsymbol{x}^h\left(\boldsymbol{p},\overline{W}^h\right)\right) = a^h(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p}) \cdot \overline{W}^h$$

y que cada hogar tiene una demanda positiva para cada bien. Entonces, estas preferencias pueden ser agregadas y representadas por aquellas de un hogar representativo, con función indirecta de utilidad:

$$V(\boldsymbol{p},\overline{W}) = U\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p},\overline{W})\right) = a(\boldsymbol{p}) + b(\boldsymbol{p}) \cdot \overline{W}$$

donde $a(\boldsymbol{p}) \equiv \int_{h\in\mathcal{H}} a^h(\boldsymbol{p})dh$, y $\overline{W} \equiv \int_{h\in\mathcal{H}} \overline{W}^h dh$ es la riqueza agregada.

[58] Estas preferencias son convenientes porque conducen a curvas de Engel lineares y se garantiza que las curvas de Engel de todos los hogares para cada bien tienen la misma pendiente que la del resto de los hogares.

Equilibrio parcial

- Los MHI se han aplicado a analizar de manera aislada y parcial diferentes variables y problemas macroeconómicos. En este campo, entre dichos desarrollos teóricos pueden destacarse, sin ánimo de exhaustividad, los siguientes:
  - Demanda de consumo agregado (renta permanente y paseo aleatorio de HALL [ver tema 3.A.33])
  - Demanda de inversión (costes de ajuste o "q de TOBIN" [ver tema 3.A.34]).
  - Demanda de dinero (MIU (SIDRAUSKI), CIA (LUCAS), Shopping time (MCCALLUM) [ver tema 3.A.35]).
  - Mercado de trabajo (modelos de costes de ajuste en la demanda de trabajo de BENTOLILA y BERTOLA (1990) o HAMERMESH (1993) [ver tema 3.A.26])

Equilibrio general

- Por otra parte, entre los innumerables desarrollos más relevantes en modelos de equilibrio general se pueden citar:
  - Modelos de crecimiento económico
    - Modelo Ramsey-Cass-Koopmans (como base).
    - Modelos de crecimiento endógeno.
  - Modelos de ciclo económico (DSGE), basados en el modelo R-C-K pero incorporando incertidumbre (shocks) y oferta de trabajo:
    - Modelos de ciclo real (Real Business Cycle).
    - Modelos de la "Nueva Síntesis Neoclásica".
  - Modelos de evaluación integrados (*Integrated Assessment Models*, IAMs) como del modelo de NORDHAUS (1992).

2.3. Modelos de generaciones solapadas

2.3.1. Definición y rasgos fundamentales

- Los **modelos de generaciones solapadas (MGS)** son aquellos en los que el agente representativo de una colectividad vive un número finito de periodos, por lo que el horizonte de optimización sí que está acotado, pero con la peculiaridad de que los agentes que mueren son sustituidos por otros idénticos, que nacen antes de dicha muerte por lo que ambas generaciones se "solapan" durante un número determinado de periodos.

- Los **rasgos fundamentales** que caracterizan los MGS son básicamente los mismos que los de los MHI, a los que conviene añadir:
  1. *Los agentes que se solapan son los consumidores u hogares pero no las empresas*. El supuesto de vida infinita es realista para las empresas, pero no lo es tanto para los hogares. En cualquier caso, la razón de ser de estos modelos se encuentra en la posibilidad de estudiar relaciones económicas ausentes en los MHI.
  2. *Son modelos de equilibrio general*, es decir, no estudian aisladamente a un tipo de agentes sino a la economía en su conjunto, si bien pueden darse modelos de equilibrio general muy sencillos, como las economías de intercambio puro (sin producción).
  3. *Son modelos cuya razón de ser es el análisis de la heterogeneidad de agentes. Más concretamente, la heterogeneidad en la edad: la convivencia de generaciones viejas y jóvenes*. Es posible que se quieran conocer las implicaciones económicas de la continua llegada o nacimiento de nuevos hogares, pues esto crea un nuevo conjunto de interacciones económicas en tanto que las decisiones tomadas por las "viejas generaciones" pueden afectar a los precios que soportarán las "jóvenes generaciones". Y, evidentemente, este tipo de interacciones no pueden estudiarse en los MHI.
  4. Constituyen la alternativa manejable a los omnipresentes MHI. Si bien en ciertos casos especiales los MGS ofrecen idénticas conclusiones en términos de dinámicas del capital y del consumo, su valor añadido reside precisamente en el caso en que difieren y dan nuevas

visiones sobre aspectos como el mercado de trabajo, la deuda pública, los impuestos, el dinero, el sistema de la Seguridad Social…

5. En el plano técnico, estos modelos presentan la característica diferencial, respecto a MHI, referida a su equilibrio: *puede presentar problemas de existencia o puede estar indeterminado o ser múltiple*. Es por ello que se suele necesitar especificar más en detalle las funciones de utilidad y de producción a fin de poder garantizar la existencia de un equilibrio no trivial bien definido.
6. *En términos de análisis de bienestar, se da una importante discrepancia con respecto a los MHI. Como demuestra ACEMOĞLU (2008), en los MGS el equilibrio competitivo no es necesariamente eficiente en el sentido de Pareto, es decir, no se cumple el 1TFEB, lo que es muy llamativo dada la ausencia de todo fallo de mercado* [ver tema 3.A.23]. La razón estriba en el carácter infinito del número de bienes (uno por período), ya que cuando se tienen infinitos bienes, el 1TFEB añade una condición adicional para su cumplimiento, en ocasiones llamado *"criterio de Malinvaud-Cass"*, que exige la finitud de la suma de todos los precios (i.e. $\sum_{j=0}^{+\infty} p^*_j < \infty$, siendo p^*_j los precios de equilibrio de cada bien). Este criterio se incumple en los MGS, ya que hay un bien en cada período, por lo que con tiempo infinito hay infinitos bienes con precio estrictamente positivo. De este modo, pueden existir asignaciones que dominen al equilibrio competitivo. Curiosamente, esta condición adicional no es necesaria para el cumplimiento del 2TFEB, por lo que este sí que se cumple en los MGS, es decir, un óptimo de Pareto puede alcanzarse de manera descentralizada a través de redistribuciones.

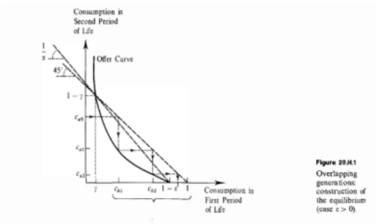
   Por otra parte, no se debe olvidar que el reconocimiento explícito a la existencia de diferentes agentes obligue a ser cautelosos a la hora de definir el óptimo de Pareto a fin de evitar comparaciones interpersonales de utilidad. Es por ello, que frecuentemente se recurre a un concepto distinto, el "óptimo del planificador social", que es el óptimo computado como solución del planificador benevolente que maximiza una función de bienestar social bergsoniana explícita, habitualmente como suma de las utilidades ponderadas de las diferentes generaciones. Por tanto, óptimo de Pareto y óptimo del planificador dejarían de ser equivalentes [ver tema 3.A.24].
7. Estos modelos pueden exhibir situaciones de *"ineficiencia dinámica"*, que constituye un ejemplo paradigmático de la probable ineficiencia del equilibrio competitivo en MGS. La ineficiencia dinámica se define como un equilibrio competitivo con sobreacumulación de capital. En efecto, el equilibrio competitivo de estado estacionario de los MGS arroja típicamente un nivel de capital diferente al de la denominada "regla de oro" (*Golden rule*), que es el que maximiza el nivel de consumo (y bienestar) en estado estacionario. En los modelos más sencillo, la condición matemática que determina dicha ineficiencia dinámica es:

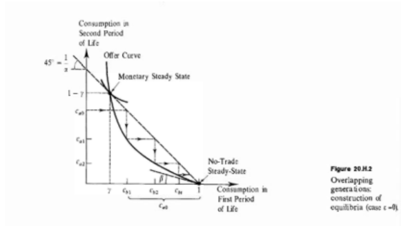
   $$r^* < n$$

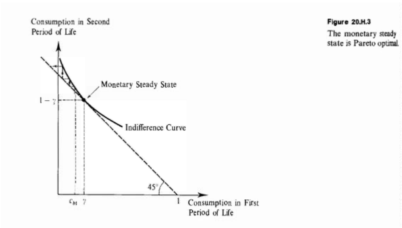
   Es decir, se da ineficiencia dinámica cuando el tipo de interés neto de equilibrio competitivo es inferior a la tasa de equilibrio de la población. En este caso, todas y cada una de las infinitas generaciones podrían aumentar su consumo y bienestar mediante una reducción del ahorro.

   La intuición económica detrás de este resultado se basa en la combinación de la existencia de externalidades pecuniarias entre generaciones unido a la infinitud de agentes y bienes de la economía. En efecto, los individuos de una generación se enfrentan a los precios (rentabilidad del capital) determinados por el stock de capital acumulado hasta la fecha y que es resultado de decisiones de generaciones previas. En otras palabras, se da una externalidad pecuniaria intergeneracional en el proceso de acumulación de capital, pues la generación joven debe ahorrar/acumular para consumir en su vejez, pero este ahorro tiene una rentabilidad determinada por la productividad marginal del nivel de stock heredado, de modo que cuanto mayor sea este, menor será la rentabilidad y más se verán forzados a ahorrar, empeorando así la situación. De ahí la condición matemática anterior, pues la rentabilidad del capital con sobreacumulación es demasiado baja. Estas externalidades pecuniarias en general no afectan a la consecución de un equilibrio eficiente, pero deja de ser el caso en presencia de un número infinito de agentes y de bienes, y se agrava cuanto mayor es esta necesidad de ahorrar, como los modelos en que los agentes viejos no tienen rentas de ningún tipo y sólo pueden consumir a partir del ahorro previo.

En cualquier caso, hay que recalcar que la ineficiencia dinámica no es una mera curiosidad analítica o una posibilidad exótica, sino que se demuestra que puede darse en circunstancias muy plausibles. Otra cuestión es la incidencia en economías reales que, claro está, queda muy limitada a economías desarrolladas (es muy difícil defender que Chad tenga un problema de exceso de acumulación de capital).







2.3.2. Modelización típica de agentes

Consumidores u hogares

- Como ya se ha explicado, los MGS son modelos de agente representativo con solapamiento entre diferentes generaciones de agentes, pero este solapamiento solo se refiere a consumidores u hogares. En el aspecto matemático o formal, las preferencias de los hogares se especifican del mismo modo que en los MHI, pero la existencia de distintas generaciones obliga a tres particularidades:
  a. Los individuos pertenecientes a una generación determinada son idénticos entre sí, por lo que su conducta se puede sintetizar en la de un individuo representativo.
  b. Es necesario determinar la evolución histórica de la población. En los casos más simples, se asume habitualmente que la población de una generación o cohorte (L_t) crece de manera exponencial a una tasa exógena constante, n:
  $$L_{t+1} = L_t \cdot (1 + n)$$
  Este aspecto es muy relevante dado que este ritmo de crecimiento va a ser determinante en los resultados de muchos modelos.
  Hay que notar que con esta especificación sencilla, los agentes conocen exactamente la fecha de su muerte. En modelos más refinados, la dinámica demográfica incorpora incertidumbre, de modo que el agente no conoce con certeza el fin de su vida, sino solamente en términos probabilísticos, según el modelo de muerte de Poisson o modelo de "juventud perpetua", con probabilidad de muerte constante v en cada instante. Unido a una tasa de nacimientos en cada instante de n, la dinámica de la población sería:
  $$L_{t+1} = L_t \cdot (1 + n - v)$$
  c. El solapamiento implica que en un periodo se producen simultáneamente decisiones de consumo y ahorro de cohortes o generaciones diferentes. Por lo tanto, se hace necesario especificar dichas decisiones no sólo por el instante de tiempo en que se producen, sino por la

edad del agente. De este modo, en el ejemplo más sencillo de generaciones que viven 2 periodos (joven y viejo), la utilidad del hogar quedaría:

$$u\left(c_t^J\right) + \beta \cdot u\left(c_{t+1}^V\right)$$

Siendo c_t^J el consumo del agente joven en el período t y c_{t+1}^V su consumo en el siguiente período, cuando es viejo. Esto es relevante a la hora de caracterizar el equilibrio competitivo, en concreto en las restricciones de factibilidad o vaciado de mercados, pues el consumo agregado en el instante t sería la suma del consumo agregado de la generación joven, $C_t^J = L_t \cdot c_t^J$, más el consumo de la generación vieja, $C_t^V = L_{t-1} \cdot c_t^V$, y en conjunto no puede exceder la riqueza o recursos agregados disponibles de ambas generaciones, de modo que:

$$L_t \cdot c_t^J + L_{t-1} \cdot c_t^V \leq L_t \cdot w_t^J + L_{t-1} \cdot w_t^V$$

Dividiendo por L_t:

$$c_t^J + \frac{c_t^V}{1+n} \leq w_t^J + \frac{w_t^V}{1+n}$$

Lo que da lugar a una restricción de recursos muy similar a la restricción presupuestaria intertemporal, solo que en este caso es intratemporal pero intergeneracional.

2.3.3. Aplicaciones

- Desde un punto de vista material, ya se ha adelantado que los MGS son modelos de equilibrio general, y en concreto se trata de modelos de crecimiento económico o de largo plazo, pues se suele recurrir a equilibrios de estado estacionario.
- Desde el punto de vista formal, estos MGS pueden dividirse en modelos de tiempo discreto y de tiempo continuo:
  - Los MGS en tiempo discreto son los más antiguos, con origen en los trabajos de ALLAIS (1947), SAMUELSON (1958) y DIAMOND (1965).
    - El modelo Diamond-Samuelson es el MGS base. Su gran ventaja es que, con certidumbre sobre la muerte, es decir, conocimiento perfecto de la etapa vital en que se está, el modelo permite observar el efecto de la edad sobre el consumo y ahorro, o efecto "ciclo vital".
      - Una de las principales aplicaciones del modelo Diamond-Samuelson es el análisis de la política fiscal. En concreto, se utiliza para estudiar la equivalencia ricardiana (y su incumplimiento, BARRO 1974) así como los sistemas de pensiones o seguridad social, tanto de reparto (*pay-as-you-go*) como de capitalización (*fully funded*), su comparación y efectos (neutralidad) sobre la asignación de recursos y el bienestar.
    - El modelo puede aumentarse para dar cabida a la *jubilación endógena* (FELDSTEIN, 1974, con sistema de reparto).
    - Estos modelos también pueden refinarse para conocer los *efectos macroeconómicos del envejecimiento* de la población a través de cambios en su tasa de crecimiento (WEIL, 1997) o incluso endogenizar dicha tasa a través de *modelos de fertilidad* (LAPAN y ENDERS, 1990).
  - Los MGS en tiempo continuo tienen como modelo base el modelo Blanchard-Yaari (YAARI, 1965; BLANCHARD, 1985), que exhibe incertidumbre sobre la muerte (YAARI) pero con "juventud perpetua" (BLANCHARD, probabilidad de muerte independiente de la edad).

2.4. Limitaciones de los modelos de agente representativo y nuevos enfoques

- Las **críticas a los modelos de agente representativo** provienen de diversos ámbitos.
  - En primer lugar, cabe recordar la *validez teórica limitada de la existencia de un agente representativo*. No solo por los casos en que no puede demostrarse su existencia (positiva o normativa), sino también por la *simplificación que supone prescindir de la heterogeneidad de los agentes* incluso en los casos de existencia de agente representativo. La cuestión se reduce, por tanto, a determinar hasta qué punto se puede renunciar a dicha heterogeneidad o cuándo ésta es prescindible en el análisis.

- Asimismo, surge la cuestión acerca de la *validez de un agente "representativo"*: ¿por qué la colectividad debe comportarse en el agregado como uno de sus miembros? ¿qué resultado teórico, por restrictivo que sea, permite afirmar tal cosa? Curiosamente, lo que la teoría microeconómica sí ofrece son resultados en el sentido opuesto, como el teorema Sonnenschein-Mantel-Debreu en teoría del Equilibrio General o el teorema de Imposibilidad de Arrow en Economía del Bienestar (las preferencias sociales no tienen por qué ser racionales).

- Esta crítica ha llevado a la búsqueda de enfoques alternativos al agente representativo, que tienen en común el aprovechamiento de nuevas herramientas matemáticas y poder de computación no disponibles en los 70 y 80, cuando se adoptó el enfoque del agente representativo por conveniencia analítica. Entre estos enfoques alternativos se encuentran:
  - *Modelos de agentes heterogéneos*: Se trata de modelos que permiten que los agentes varíen en sus preferencias (actitud frente al riesgo, productividad, descuento del futuro…) o características para poder tener una visión más exacta de unos efectos distributivos de las perturbaciones o de las políticas económicas en diferentes agentes.
  - *Modelos basados en agentes* (*agent-based models*): Son simulaciones computarizadas de un conjunto de decisores (agentes) e instituciones que interactúan según reglas prescritas. Tienen la particularidad de que no asumen ni que la economía convergerá a un estado de equilibrio ni una forma específica de racionalidad. Los comportamientos se modelizan en función de lo que se observa, de ahí que sea un enfoque inmensamente intensivo en datos que permitan identificar patrones robustos. Se permiten situaciones de desequilibrio y no linealidades, que pueden generar situaciones de no vaciado de mercados y crisis endógenas. Sin embargo, como en los modelos DSGE resueltos numéricamente, el problema reside en entender clara e intuitivamente los mecanismos económicos que hay detrás.
  - *Modelos de la "economía del conocimiento imperfecto" o IKE* (*Imperfect Knowledge Economics*), más centrados en la existencia de múltiples estrategias alternativas para formación de expectativas, en función del contexto y de la información disponible.
  - *Economía del comportamiento* (*Behavioral Economics*): Esta rama de la literatura también ha tenido en este campo su aportación, como la obra de PAUL DE GRAUWE *Lectures on Behavioral Macroeconomics* (2012), en el que en lugar de agentes capaces de conocer y entender el modelo económico verdadero según el cual tomar sus decisiones (enfoque *top down*), los agentes se ven afectados por limitaciones cognitivas que conducen a dinámicas agregadas completamente distintas (enfoque *bottom up*).

- Finalmente, a pesar de estos nuevos y prometedores caminos de investigación, se mantiene abierto el debate, como apunta SIMON WREN-LEWIS, acerca de si la microfundamentación podrá dejar cabida a todo tipo de heterogeneidad o si, por el contrario, esto llevará a una complejidad (incluso caos) ininteligible.

CONCLUSIÓN

- ***Recapitulación (Ideas clave)***:
  - El considerar que los consumidores y las empresas toman sus decisiones siguiendo un enfoque intertemporal permite explicar hechos tan cruciales como que los hogares ahorren o que las empresas inviertan.
    - Se trata de aspectos vitales que no tendrían cabida si las decisiones se tomaran de forma estática, y sólo esto ya sirve para justificar la importancia del análisis intertemporal.
  - Pero, además, el análisis de las decisiones intertemporales ha pasado a constituir la fundamentación microeconómica de un gran número de aportaciones de la teoría macroeconómica moderna o de la economía internacional.
  - Entre éstas, podríamos destacar:
    - Teorías de crecimiento económico, como el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans.

- Enfoque intertemporal de balanza de pagos.
- Teorías de ciclos reales.
- …

- ***Relevancia***:
  –
- ***Extensiones y relación con otras partes del temario***:
  –
- ***Opinión***:
  –
- ***Idea final (Salida o cierre)***:
  – El análisis microeconómico dinámico, con las aportaciones seminales de RAMSEY y FISHER, ha sido la base del gran desarrollo de la macroeconomía fundamentada microeconómicamente con modelos eminentemente dinámicos. Desde este punto de vista, uno puede argumentar que bajo el argumento de la metodología de la macroeconomía moderna le debe más a IRVING FISHER que a JOHN MAYNARD KEYNES. Ahora bien, la modelización de rigideces y la efectividad de las políticas de demanda en modelos de la Nueva Economía Keynesiana obligan a matizar esa afirmación.
  – https://youtu.be/W6DVUehdczM?t=6 – TIME – *Gonçalo Fonseca | Blindspots in Economic Thinking*

Bibliografía

Rodríguez López, J. L. (2016). *Tema 3.A.12: Decisiones intertemporales de consumidores y empresas. Modelo de horizonte infinito y modelo de generaciones solapadas.* ICEX-CECO.

Se basa en:

– Heijdra, B. J. (2017). Foundations of modern macroeconomics (Third edition). Oxford University Press.
– Mas-Colell, A., Whinston, M. D. & Green, J. R. (1995). Microeconomic theory. Oxford University Press.
– Acemoğlu, D. (2009). *Introduction to modern economic growth*. Princeton University Press. Ver capítulo 5 (y otros, esto es una nota posterior escrita el 21/07/2021 mientras leía dicho capítulo, que me ha parecido especialmente relevante, lo que no quiere decir que haya otros muchos del manual)

Tema Juan Luis Cordero Tarifa

Escot Mangas, L., Olmedo Fernández, E. & del Pozo García, E. (2002). *Optimización dinámica*. Universidad Complutense de Madrid; Documentos de Trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. http://eprints.ucm.es/33921/

Cerdá Tena, E. (2001). *Optimización dinámica*. Prentice-Hall.

Preguntas de otros exámenes

–

Enlace a preguntas tipo test

https://www.quia.com/quiz/6562903.html

Anexos

A.1. *Anexo 1*: Teoría de la optimización. Optimización dinámica.

Idea

- **Todos tenemos que tomar decisiones**. En cada momento de nuestra vida, tanto privada como profesional, nos vemos obligados a seleccionar una alternativa dentro de un conjunto de opciones. La calidad de las decisiones que tomamos afecta radicalmente a nuestra salud, nuestro bienestar económico, las relaciones que mantenemos con otras personas, etc.
  - Esta afirmación puede aplicarse también a las empresas, los organismos de la Administración Pública y todo tipo de agentes económicos.
  - Debido a la universalidad del problema de toma de decisiones resulta de gran interés preguntarse *cuál es la metodología adecuada para tomar decisiones*, entendiendo por "adecuada" aquella que proporciona un mayor grado de consecución de los objetivos deseados.
- En este sentido, la **Teoría de la Optimización** constituye la herramienta matemática más "adecuada" para la solución de problemas que implican la toma de decisiones. Una primera clasificación de los distintos métodos de optimización distingue entre optimización estática y optimización dinámica.
  - La *optimización estática* proporciona una magnitud óptima, aislada en el tiempo, para las variables de las que depende la función objetivo del problema que hace máxima o mínima dicha función objetivo. En la optimización estática el tiempo no interviene en la formulación del problema.
  - Cuando existe una relación intertemporal entre las variables que definen el problema, carece de sentido utilizar la optimización estática, ya que esa relación dinámica no queda recogida en estos métodos de optimización, no resultando por ello necesariamente óptima la solución por estos obtenida. En estos casos, para obtener soluciones óptimas deben utilizarse las herramientas que proporciona la *optimización dinámica*.

- La **optimización dinámica** sirve para calcular cadenas o secuencias óptimas de acciones en el tiempo, es decir, para determinar la magnitud o valor óptimo de las variables que definen el objetivo del problema en cada instante de tiempo dentro de un intervalo dado.
  - Estas secuencias de valores serán óptimas, en el sentido de que hacen máximos o mínimos los objetivos del problema teniendo en cuenta tanto las restricciones que impongamos como la relación dinámica existente entre sus variables.
  - La solución de un problema de optimización dinámica proporciona, por tanto, una trayectoria temporal óptima completa para cada variable del problema, mostrando el *mejor* valor de la variable en cada período.

- Existen, en principio, tres formas alternativas de abordar este tipo de problemas: el *Cálculo de Variaciones*, la *Teoría del Control Óptimo* y la *Programación Dinámica.*
  - Pasamos a repasar las principales características del método de la *Teoría del Control Óptimo* por ser el más útil en la oposición.

Descripción del problema (Teoría del Control Óptimo)

Supuestos

- Un **problema de optimización dinámico** será de la siguiente forma:

$$\underset{\{u_t \in U\}}{maximizar^{59}} \quad \overbrace{V(y) = \int_0^T F\left(t, \underbrace{y_t}_{\substack{\text{variable}\\ \text{de estado}}}, \underbrace{u_t}_{\substack{\text{variable}\\ \text{de control}}}\right) dt}^{\text{Función objetivo}}$$

$$sujeto\ a \begin{cases} \underbrace{\dot{y}_t = f(t, y_t, u_t)}_{\substack{\text{ecuación de movimiento o}\\ \text{ecuación de estado}}} \\ \underbrace{y_0 = A}_{\text{condición inicial}} \\ \underbrace{y_T = Z}_{\text{condición terminal}} \end{cases}$$

  - Este problema es conocido como *problema fundamental del problema del control óptimo*.
    - En él, la condición de transversalidad es un punto final único y predeterminado.
    - Para que dicho problema tenga significado vamos a suponer que la integral existe y converge a un valor finito, es más, exigiremos que todas las funciones que aparecen en el problema sean continuas y continuamente diferenciables.
      - Este supuesto es necesario porque la obtención de la solución al problema se basa en el cálculo diferencial clásico. La diferencia más importante respecto a éste será que en lugar de trabajar con la diferencial dx que cambia el valor de $y = f(x)$, trabajamos con la *variación de toda una curva en el tiempo* y que cambia el valor de la forma funcional $V(y)$.
  - En la teoría del control óptimo, el problema de optimización dinámica está constituido por tres tipos de variables:
    - t: el tiempo
    - y_t: la variable de estado
    - u_t: la variable de control
      - Es en esta última variable en la que centra la atención el agente decisor, relegando a un segundo lugar a la variable de estado. Esto será posible únicamente en el caso en

[59] Nos centraremos en resolver el problema de maximización entendiendo que el problema de minimización se resuelve de forma análoga teniendo en cuenta que resolver el problema: $min \quad V(y)$, es equivalente que resolver el problema: $max \quad -V(y)$

que la evolución de la variable de control u_t determine sin ambigüedad, una vez dada la condición inicial sobre y, la trayectoria correspondiente de la variable de estado y_t.

- Por esta razón, el problema de control óptimo debe contener una ecuación dinámica, denominada *ecuación de movimiento* o *ecuación de estado*, que relacione la evolución de y con el valor que tome la variable de control en cada instante del tiempo u:

$$\dot{y}(t) = f(t, y_t, u_t)$$

- La solución a esta ecuación dinámica permite que una vez encontrada la trayectoria óptima u_t*, sea posible reconstruir la trayectoria óptima para la variable de estado y_t*. Es por ello, que el objetivo del problema de control óptimo ya no será encontrar la trayectoria óptima y_t*, sino la trayectoria óptima u_t*.

Desarrollo

- El desarrollo más sencillo de la teoría del control óptimo es el **Principio del Máximo** asociado al matemático ruso L.S. PONTRYAGIN (1956).
  - Gracias a las ventajas del principio del Máximo para la solución de problemas de optimización dinámica, este principio ha sustituido en buena medida al Cálculo de Variaciones en la solución de problemas donde los valores posibles para la variable de control u, están incluidas en un conjunto cerrado y convexo U permitiendo de esta manera que aparezcan soluciones esquina.
  - Por otra parte, este problema de control óptimo constituye además una generalización del problema del cálculo de variaciones.

- Las condiciones necesarias o de primer orden para resolver el problema de control óptimo se resumen en las **condiciones del Principio del Máximo**.
  - Estas condiciones son condiciones que necesariamente ha de cumplir una trayectoria para que sea la óptima. Para ello, nos basamos en un nuevo concepto: la *función Hamiltoniano*:

$$\mathcal{H}^0(t, y, u, \lambda) \equiv \underbrace{F(t, y_t, u_t)}_{\substack{\text{Integrando} \\ \text{de la función objetivo}}} + \lambda_t \cdot \underbrace{f(t, y_t, u_t)}_{\substack{\text{Ecuación de movimiento} \\ \text{de la variable de estado}}}$$

  dónde la variable auxiliar λ_t, dependiente del tiempo, actúa como un multiplicador dinámico de Lagrange o *precio sombra de la variable de estado* asociada. Esta variable equivale a un multiplicado dinámico e indica el efecto (valor sombra) sobre el funcional óptimo ($V(y)$) de variaciones de las variables de estado.
  - Las condiciones del Principio del Máximo vienen dadas por:

    a) $\underset{\{u_t \in U\}}{maximizar} \ \mathcal{H}^0(t, y, u, \lambda) \ \forall \ t \in [0,T] \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u} = 0$

    b) $\dot{y}_t = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} = f(t, y_t, u_t) \rightarrow$ Ecuación de movimiento para la variable de estado y

    c) $\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial y} \rightarrow$ Ecuación de movimiento para la variable auxiliar λ

    d) $y_T = Z \rightarrow$ Condición de Transversalidad

    - La solución al sistema formado por estas ecuaciones proporciona las trayectorias óptimas para cada una de las variables u_t*, y_t* y λ_t*[60].

- El Principio del Máximo constituye una **condición necesaria o de primer orden** para encontrar las trayectorias críticas. Sin embargo, estas condiciones no son en general suficientes. Por tanto, **será necesario que esas trayectorias cumplan además unas condiciones suficientes o de segundo orden** para que sean realmente óptimas, es decir, para que realmente maximicen la función objetivo.
  - Estas condiciones de segundo orden requieren que se satisfagan ciertas condiciones de concavidad. Presentamos a continuación el *teorema de suficiencia de Arrow*, definido para el problema de optimización que hemos presentado. Este teorema establece que las condiciones

[60] El principio del Máximo se puede generalizar para el caso en que existen más de una variable de estado y de control.

necesarias establecidas por el Principio del Máximo también son suficientes si se cumple que la función Hamiltoniana maximizada es cóncava en la variable y_t $\forall\ t \in [0,T]$, dado λ[61]:

$$\mathcal{H}^{0}*(t, y, u, \lambda) = F(t, y_t, u_t*) + \lambda \cdot f(t, y_t, u_t*)$$

Teoría del control óptimo con horizonte infinito

La teoría del control óptimo, a pesar de sus limitaciones, ha sido ampliamente utilizada en economía. Entre los temas abordados bajo este enfoque se encuentra la elaboración y extensión de los modelos relativos al crecimiento económico[62]. Una característica diferencial de este tipo de aplicaciones es que consideran un horizonte de planificación infinito. Cuando tratamos con un problema de control óptimo con horizonte de planificación infinito aparece el problema conocido como *convergencia de las funciones objetivo* a la hora de aplicar el Principio del Máximo. Este problema radica en que la forma funcional objetivo $V(y) = \int_0^T F(t, y_t, u_t)\, dt$ es ahora una integral impropia, que puede tener un valor finito o infinito. En este último caso, es decir, si la integral diverge, pueden existir más de una trayectoria para la variable de estado y de control que conduzca a un valor infinito en la forma funcional, siendo difícil determinar cuál de ellas es la óptima. Para evitar este tipo de problemas. Se suele exigir el cumplimiento de alguna condición que garantice la convergencia de la forma funcional a un valor concreto, lo que permite determinar las trayectorias óptimas y_t* y u_t* sin equívocos. Este tipo de condición suficiente para la convergencia de la forma funcional suele aparecer en forma de tasa de descuento, de forma que si en la integral, el integrando $F(t, y_t, u_t)$ toma la forma $e^{-\rho t} \cdot G(t, y_t, u_t)$, donde ρ es una tasa positiva de descuento y la ecuación $G(t, y_t, u_t)$ está acotada, se garantiza que la forma funcional converge a un valor finito.

Otro problema que aparece en este tipo de problemas con horizonte de planificación infinito hace referencia a las condiciones de transversalidad, ya que en estos casos no existe un instante final T dado, rompiéndose la validad general de las condiciones de transversalidad de las condiciones necesarias del principio del máximo. En este tipo de problemas y para derivar las respectivas condiciones de transversalidad, se hacen dos tipos de supuestos sobre el punto final:

a) El valor final de la variable de estado converge en el infinito a un valor concreto:

$$\lim_{t\to\infty} y_t = y_\infty, \text{ con } y_\infty \text{ dado}$$

b) Cuando no se introduce este supuesto sobre la convergencia de la variable de estado, debe utilizarse una condición de transversalidad de la forma:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t = 0$$

Teniendo en cuenta estas circunstancias, el problema de control óptimo se soluciona utilizando las condiciones necesarias del Principio del Máximo, a las que hay que sustituir la condición de transversalidad por una de estas dos opciones. En cuanto a las condiciones suficientes, se aplica el teorema de la suficiencia de Arrow, en el que hay que tener en cuenta que para que las condiciones necesarias sean a su vez suficientes es necesario que además de que la función Hamiltoniana maximizada, $\mathcal{H}^{0}*(t, y, u, \lambda) = F(t, y_t, u_t*) + \lambda_t \cdot f(t, y_t, u_t*)$, sea cóncava en la variable y_t $\forall\ t \in [0,T]$, dado λ, debe verificarse que:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t \cdot [y_t - y_t*] \geq 0$$

Hamiltoniano a valor corriente

Una variable del Principio del máximo analizado anteriormente, y que es utilizado en aquellos problemas de control óptimo con horizonte infinito en los que en la integral aparece el factor de

---

[61] Esta función se encuentra sustituyendo el valor óptimo de la variable de control $u*$ en el Hamiltoniano que soluciona la condición $\underset{\{u_t \in U\}}{maximizar}\ \mathcal{H}(t,y,u,\lambda)\ \forall\ t \in [0,T]$.

[62] La modelización del crecimiento económico como un problema de optimización dinámica bajo este enfoque del control óptimo se recoge bajo la denominación de modelos de crecimiento óptimo (p.ej. modelo de Ramsey-Cass-Koopmans).

descuento $e^{-\rho t}$, es el que utiliza el denominado *Hamiltoniano a valor corriente*. Este tipo de problemas se pueden formular de forma genérica como:

$$\underset{\{u_t \in U\}}{maximizar} \qquad V(y) = \int_0^\infty F(t, y_t, u_t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} \cdot G(t, y_t, u_t)\, dt$$

$$sujeto\ a \qquad \begin{cases} \dot{y}_t = f(t, y_t, u_t) \\ y_0 = A \end{cases}$$

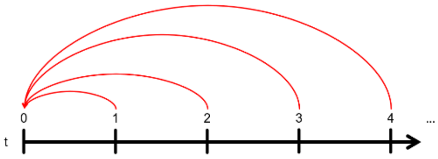
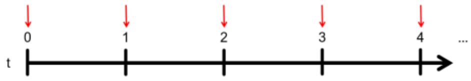
En un problema con factor de descuento ($e^{-\rho \cdot t}$) en la función objetivo, éste aparece en el hamiltoniano al ser parte de la misma, lo que hace que dicha función (hamiltoniana) esté expresada en términos de valor del momento de actualización, es decir, hoy, de ahí el nombre "hamiltoniano valor presente". Si multiplicamos todo él por $e^{\rho \cdot t}$, dentro del hamiltoniano el factor de descuento que acompaña a la función objetivo se anula, pero aparece en las ecuaciones de estado, que haciendo un cambio de variable conveniente en la(s) variable(s) de coestado asociada(s) ($\lambda_t \cdot e^{\rho \cdot t} = \mu_t$), vuelve a desaparecer. **Este cambio hace que el hamiltoniano no esté expresado en valores del instante inicial ($t = 0$), sino en valores del instante t, de ahí que se denomine "hamiltoniano valor corriente"**. Este cambio también modifica ligeramente algunas de las condiciones de primer orden, necesarias de óptimo (respecto de las variables de estado).

El Hamiltoniano a valor corriente ($\mathcal{H}^c$) de este problema se construye a partir del Hamiltoniano estándar o Hamiltoniano a valor presente ($\mathcal{H}^0$) cómo:

$$\mathcal{H}^c = e^{\rho t} \cdot \mathcal{H}^0 = G(t, y_t, u_t) + \mu_t \cdot f(t, y_t, u_t)$$

con $\mu_t = e^{\rho t} \cdot \lambda_t$ (variable auxiliar a valor corriente).

- A partir de este Hamiltoniano a valor corriente se construyen las nuevas condiciones de primer orden del Principio del Máximo:
  a) $\underset{\{u_t \in U\}}{maximizar}\ \mathcal{H}^c(t, y, u, \lambda)\ \forall\, t \in [0,\infty] \Longrightarrow \frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial u} = 0$
  b) $\dot{y}_t = \frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial \mu} = f(t, y_t, u_t) \rightarrow$ Ecuación de movimiento para la variable de estado y
  c) $\dot{\mu}_t = -\frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial y} + \rho \cdot \mu \rightarrow$ Ecuación de movimiento para la variable auxiliar λ
  d) $\lim_{t\to\infty} \mathcal{H}^c \cdot e^{-\rho t} = 0\ \&\ \lim_{t\to\infty} \mu_t \cdot e^{-\rho t} = 0 \rightarrow$ Condiciones de Transversalidad

	Hamiltoniano a valor presente ($\mathcal{H}^0$)	**Hamiltoniano a valor corriente ($\mathcal{H}^c$)**
Construcción	$\mathcal{H}^0 = e^{-\rho t}\cdot G(t, y_t, u_t) + \lambda_t \cdot f(t, y_t, u_t)$	$\mathcal{H}^c = e^{\rho t}\cdot \mathcal{H}^0 = G(t, y_t, u_t) + \overbrace{\mu_t}^{e^{\rho t}\cdot\lambda_t} \cdot f(t, y_t, u_t)$
Significado	Todo está valorado en el período presente ($t = 0$). Por lo tanto, el significado de λ_t es el valor sombra de aumentar una unidad de la variable de estado (y_t) sobre el valor futuro de la función objetivo ($V(y)$) *descontada* en el período *0*.  	Todo está valorado en el período corriente (t). Por lo tanto, el significado de μ_t es el valor sombra de aumentar una unidad de la variable de estado (y_t) sobre el valor futuro de la función objetivo ($V(y)$) *sin descontar* al período *0*. 
Condiciones de primer orden	▫ $\underset{\{u_t \in U\}}{maximizar}\ \mathcal{H}^0(t, y, u, \lambda)\ \forall\, t \in [0,T] \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial u} = 0$ ▫ $\dot{y}_t = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \lambda} = f(t, y_t, u_t)$ ▫ $\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial y}$ ▫ $y_T = Z$	▫ $\underset{\{u_t \in U\}}{maximizar}\ \mathcal{H}^c(t, y, u, \lambda)\ \forall\, t \in [0,\infty] \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial u} = 0$ ▫ $\dot{y}_t = \frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial \mu} = f(t, y_t, u_t)$ ▫ $\dot{\mu}_t = -\frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial y} + \rho \cdot \mu$ ▫ $\lim_{t\to\infty} \mathcal{H}^c \cdot e^{-\rho t} = 0\ \&\ \lim_{t\to\infty} \mu_t \cdot e^{-\rho t} = 0$

La mejor opción para adentrarse en la optimización dinámica es a través de manuales. Existen manuales específicos de optimización dinámica, entre los que pueden destacarse (en castellano) el de Cerdá (2001).

No obstante, muchos manuales de economía que hacen uso de esta herramienta matemática suelen incluir capítulos o apéndices dedicados, no tan amplios pero sí muy orientados a la materia económica, entre los que pueden destacar el del manual de Acemoglu (2009), del Heijdra (2009) o del Obstfeld y Rogoff (1996). El apéndice 14.1 del manual de Perman et al. ofrece un valiosísimo resumen de resolución del problema de control óptimo aplicando el principio del máximo de Pontryagin, diferenciando los casos de hamiltoniano valor presente y corriente. Otros de sus apéndices también son interesantes (optimización estática-Lagrange, condiciones de optimalidad intertemporal, etc).

A.2. *Anexo 2*: Problema de consumo ahorro en tiempo continuo

- El problema del consumo/ahorro en tiempo continuo y horizonte finito sería:

$$\max_{\{c_t\}} \quad V(c) = \int_0^T e^{-\rho\cdot t}\cdot u(c_t)\, dt$$

$$s.a \quad \begin{cases} \dot{b}_t = w_t + r_t \cdot b_t - c_t \\ b_0 = B \\ b_T = 0 \end{cases}$$

  donde $\dot{b}_t$ es la variación del ahorro en el tiempo. Como se deduce, la restricción intertemporal no es única, sino que existe una para cada momento del tiempo, por lo que hay tantas restricciones como períodos presente el problema, sólo que todas con la misma forma funcional.
  - Lo importante es precisamente la variable ahorro, pues como se observa, es la variable que conecta un período con otro: es la única variable en todo el problema que para un período dado, incorpora un vínculo con un período distinto, en este caso el inmediato posterior.
- Esto es, el problema consiste en maximizar la utilidad intertemporal sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal y a las condiciones inicial y terminal de recursos. Se trataría de un problema de optimización intertemporal en tiempo continuo o problema de control óptimo.
  - Su resolución formal se alcanza aplicando el principio del máximo de Pontryagin, esto es, formando la función hamiltoniana (valor presente) con la creación de la variable de coestado, λ_t, asociada a la ecuación de estado y obteniendo las condiciones de primer orden que son condiciones necesarias de óptimo:

$$\boxed{\mathcal{H}^0 = e^{-\rho\cdot t}\cdot u(c_t) + \lambda_t \cdot (w_t + r_t \cdot b_t - c_t)}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}^0}{\partial c_t} = 0 \Longrightarrow e^{-\rho\cdot t}\cdot u'(c_t) - \lambda_t = 0 \Longrightarrow e^{-\rho\cdot t}\cdot u'(c_t) = \lambda_t$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}^0}{\partial b_t} = -\dot{\lambda}_t \Longrightarrow \lambda_t\cdot r_t = -\dot{\lambda}_t \Longrightarrow r_t = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}^0}{\partial \lambda_t} = \dot{b}_t \Longrightarrow w_t + r_t\cdot b_t - c_t = \dot{b}_t$$

- Estas condiciones de primer orden forman un conjunto de ecuaciones diferenciales de las que se derivan las soluciones o sendas óptimas de consumo, del ahorro y de la variable de coestado. Se requeriría conocer la forma exacta de la función $u(c_t)$ para poder resolver el problema, por lo que es habitual manipularlas para poder obtener resultados cualitativos acerca de la solución sin necesidad de dar una forma concreta a dicha función.
  - De esta manipulación se obtiene la célebre **ecuación de Euler** (caso continuo), que indica la evolución del crecimiento de la variable consumo:

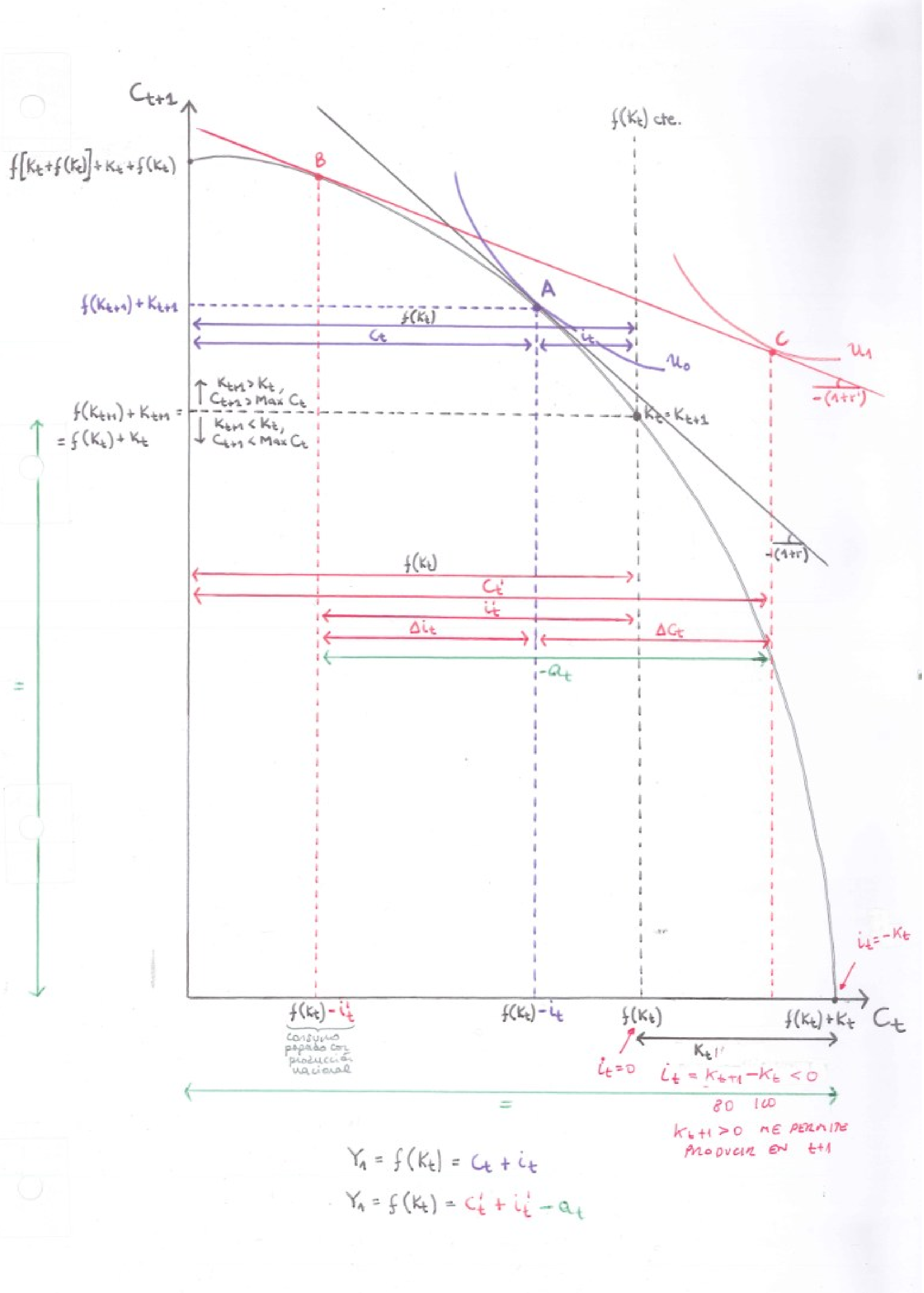
$$\dot{c}_t = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}\cdot\left(r_t - \rho\right)$$

  - Acudiendo a la elasticidad de la utilidad marginal (como inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal) obtenemos:

$$\dot{c}_t = \sigma\cdot\left(r_t - \rho\right) \Longrightarrow \dot{c}_t = \frac{1}{\theta}\cdot\left(r_t - \rho\right)$$

  - Esta ecuación de Euler tiene exactamente la misma interpretación y puede hacerse el mismo análisis que en el caso discreto. Sin embargo, el caso continuo no se presta a un análisis gráfico por razones evidentes.

A.3. Anexo 3:



C_{t+1}
$f[K_t+f(K_t)]+K_t+f(K_t)$
$f(K_t)$ cte.
B
A
C
$f(K_{t+1})+K_{t+1}$
$f(K_t)$
C_t
i_t
u_0
u_1
$-(1+r')$
$K_{t+1}>K_t$, $C_{t+1}>$ Max C_t
$f(K_{t+1})+K_{t+1}=$
$=f(K_t)+K_t$
$K_t=K_{t+1}$
$K_{t+1}<K_t$, $C_{t+1}<$ Max C_t
$-(1+r)$
C_t'
i_t'
Δi_t
ΔC_t
$-a_t$
$i_t=-K_t$
$f(K_t)-i_t'$
consumo pagado con producción nacional
$f(K_t)-i_t$
$f(K_t)$
$f(K_t)+K_t$
C_t
K_t
$i_t=0$
$i_t=K_{t+1}-K_t<0$
80 100
$K_{t+1}>0$ ME PERMITE PRODUCIR EN $t+1$
$Y_1=f(K_t)=C_t+i_t$
$Y_1=f(K_t)=C_t'+i_t'-a_t$