Crecimiento económico (II). Modelos de crecimiento endógeno: rendimientos crecientes, capital humano e innovación tecnológica.

Introducción *2′30″*

- **Enganche**: «más vale maña que fuerza»: fuerza = acumular máquinas; maña = aprender a hacer más con ellas.
  - Jefferson (1813): quien recibe mi idea «enciende su vela en la mía» sin dejarme a oscuras: **no rivalidad**.
  - ¿Se crece siempre sin progreso técnico «caído del cielo»? ¿Quién paga por inventar?
- **Relevancia**: Nobel a Romer (2018) y Aghion-Howitt (2025).
  - Al 3 % renta ×4,4 en 50 años; al 2 %, ×2,7.
  - I+D/PIB 2024: España 1,50 %, UE 2,26, China 2,69 (las 2 en 0,88 en 2000) [4.A.7].
- **Contextualización**: **crecimiento endógeno**: la tasa de LP sale *dentro* del modelo.
  - Neoclásicos: **rendimientos decrecientes** ⇒ el ahorro solo cambia el nivel [3.A.43].
  - 2 salidas: cambiar la función de producción (**1.ª generación**) o I+D con competencia imperfecta (**2.ª**).
  - Ideas **no rivales** y parcialmente **excluibles** ⇒ **rendimientos crecientes** [3.A.23].
  - Schumpeter (1942); Arrow (1962); Uzawa (1965); Romer (1986, 1990); Lucas (1988); Aghion-Howitt (1992); Jones (1995).
- **Problemática**: ¿por qué se innova si las ideas las usa cualquiera? ¿Innova el mercado lo que conviene? ¿Cambia la política la tasa o el nivel?
- **Estructura**: I, 1.ª generación; II, 2.ª; III, efecto escala y semiendógeno.

Introducción ..... 2′30″
I. 1.ª generación ..... 11′30″
1. Idea ..... 1′
2. *AK*, Barro, externalidades, U-L, Sobelow ..... 9′
3. Valoración ..... 1′30″
II. 2.ª generación: I+D ..... 9′
1. Idea: ideas no rivales ..... 1′30″
2. Variedades y calidades ..... 6′30″
3. Valoración ..... 1′
III. Rendimientos crecientes y escala ..... 6′
1. No rivalidad y efecto escala ..... 1′
2. Jones (1995) ..... 2′30″
3. Evidencia y política ..... 2′30″
Conclusión ..... 1′

I. 1.ª generación: función de producción no neoclásica *11′30″*

Basta cambiar la función de producción para que la acumulación sostenga el crecimiento pc sin progreso técnico exógeno: el capital amplio no tiene rendimientos decrecientes a LP (la economía se comporta como un AK) y r no cae. Pero el progreso técnico sigue sin explicarse.

I.1. Idea

- Solow: rendimientos decrecientes + Inada ⇒ $f(k)/k \to 0$: el crecimiento se apaga.
- Hilo del tema, **ecuación de Euler**:

$$\gamma_c = \frac{r-\rho}{\theta}$$

  - Neoclásico: r cae hasta ρ. Cada modelo = una forma de que r *no caiga*.
  - Basta que el PMg *no tienda a cero*: rendimientos no decrecientes, suficiente, no necesario.

I.2. Modelos

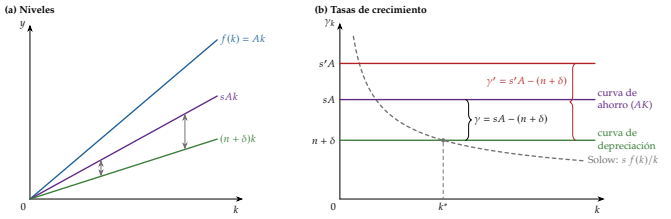
El modelo AK (Rebelo, 1991)

▹ *a) Idea y b) modelo*

- $Y = AK$, K **amplio** (físico, humano, conocimiento); A constante, *no* progreso técnico.
- Ahorro constante: $\gamma = sA - (n+\delta)$: 2 rectas horizontales. Con hogares ($r = A - \delta$):

$$\gamma_c = \gamma_k = \gamma_y = \frac{A-\delta-\rho}{\theta}, \quad s = \frac{\gamma+n+\delta}{A}$$

  - Salta a la senda equilibrada; sin fallos ⇒ 1TFEB [3.A.22].



AK en niveles y en tasas frente a Solow: ↑s sube γ para siempre

- *Implicaciones*:
  - la política (↑s, ↓ρ, ↓τ_K) sube la *tasa*: «quien guarda, halla»;
  - Rebelo: $\gamma = [(1-\tau_K)A - \delta - \rho]/\theta$: la política fiscal explica diferencias persistentes;
  - sin transición; *sin convergencia*; choques *permanentes*;
  - sin ineficiencia dinámica: $r - \gamma_Y = c/k > 0$.

▹ *d) Evidencia y e) valoración*

- Inversión ↑ en la posguerra sin ↑γ (Jones, 1995).
- Tasas muy variables con características persistentes (Easterly et al., 1993).
- Convergencia condicional ≈2 % (Barro-Sala-i-Martin, 1992).
- Forma reducida de la 1.ª generación; **filo de la navaja** (exponente exactamente 1); salario nulo.

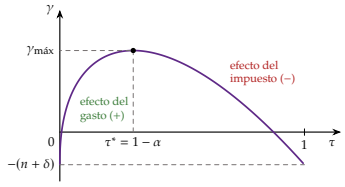
Gasto público productivo (Barro, 1990)

- $Y = AK^\alpha G^{1-\alpha}$, $G = \tau Y$ [3.A.38]: un AK, $y = \bar{A}k$ con $\bar{A} \equiv A^{1/\alpha}\tau^{(1-\alpha)/\alpha}$:

$$\gamma = s\,(1-\tau)\,A^{\frac{1}{\alpha}}\,\tau^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta), \quad \tau^* = \frac{G}{Y} = 1-\alpha$$

  - 2 efectos: más gasto productivo y menos renta: U invertida.
  - **Regla de Barro**: $\partial Y/\partial G = 1$.
  - Con hogares, $r = (1-\tau)\alpha A^{1/\alpha}\tau^{(1-\alpha)/\alpha} - \delta$: el mismo τ^*.
  - Equilibrio no óptimo (el hogar recibe solo α del rendimiento social); con suma fija, óptimo.
  - Importan el tamaño y la composición del gasto; rinde más con reformas de oferta, y más a LP que a CP (Baxter-King, 1993).
- Evidencia: productivo, pero con elasticidades hoy mucho menores que las primeras.
- Contra: filo de la navaja del AK; gasto sin partidas, deuda ni congestión.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal



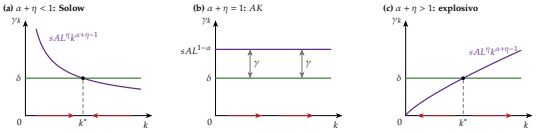
Barro: γ máxima en $\tau^* = 1-\alpha$

Externalidades: aprendizaje por la práctica

- Arrow (1962), Romer (1986): **aprendizaje por la práctica**; el conocimiento se **desborda**.
  - $Y_j = AK_j^\alpha L_j^{1-\alpha} E^\eta$, $E = K \Rightarrow y = AL^\eta k^{\alpha+\eta}$.
  - $\alpha + \eta < 1$: Solow; $= 1$: AK; > 1: explosivo.
- Con $\alpha + \eta = 1$, privado < social:

$$\gamma^{\mathrm{E}} = \frac{\alpha A L^{1-\alpha} - \delta - \rho}{\theta} < \gamma^{\mathrm{P}} = \frac{AL^{1-\alpha} - \delta - \rho}{\theta}$$

  - Rendimientos crecientes *externos* con competencia; subinversión: subvención pigouviana.
  - $E = K$: **efecto escala**; Lucas con $E = k$: sin él.
- Wright (1936): las horas por estructura de avión bajan con las ya fabricadas.
- Evidencia: inversión en equipo (De Long-Summers, 1991). Filo de la navaja ($\alpha + \eta = 1$).



Externalidades: según $\alpha + \eta$, Solow, AK o explosivo

Uzawa (1965)-Lucas (1988): capital humano

▹ *a) Idea y b) modelo*

- El capital humano se forma con *tiempo* [3.A.25]: u a bienes, $1-u$ a educación.

$$\dot{k} = Ak^\alpha (uh)^{1-\alpha} h_a^\eta - c - (\delta_K + n)k$$
$$\dot{h} = B(1-u)h - (\delta_H + n)h$$

  - Clave: educación lineal en h; H *rival*.
  - Planificador ($\eta = 0$ = equilibrio): 2 coestados; u iguala la hora en la fábrica y en el aula.
- Senda equilibrada ($r = B - \delta_H$):

$$\gamma = \frac{B - \delta_H - \rho}{\theta}, \quad u^* = 1 - \frac{\gamma + n + \delta_H}{B}$$

  - No depende de A ni del ahorro físico.
  - Pierde capital físico ⇒ crece más deprisa (Alemania, Japón); humano, más lento.
  - **Externalidad de Lucas** ($\eta > 0$): se estudia de menos ⇒ subvencionar educación.

▹ *c) Extensiones, d) evidencia y e) valoración*

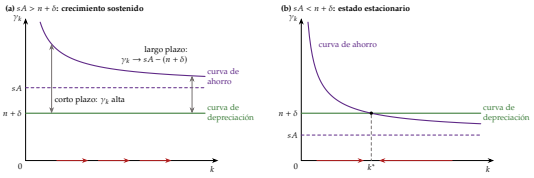
- Nelson-Phelps (1966): importa el *nivel* de h (adoptar).
- Benhabib-Spiegel (1994); competencias (Hanushek-Woessmann, 2008); externalidades: no (Acemoglu-Angrist, 2000), universitarios sí (Moretti, 2004).
- Contra: lineal en h (filo); h limitado por la vida.

Sobelow (Jones-Manuelli, 1990)

- $f(k) = Ak + Bk^\alpha$: RCE, PMg decreciente; falla solo Inada en ∞:

$$\gamma_k = s\left(A + Bk^{\alpha-1}\right) - (n+\delta)$$

  - $sA > n + \delta$: crece siempre, cada vez más despacio.
  - Crecimiento endógeno y convergencia condicional (en tasas).
  - $sA < n + \delta$: EE como Solow.
  - CES con $\sigma > 1$, igual (pero $\sigma < 1$ en los datos [3.A.11]).
  - Con hogares, $r \to A - \delta$; participación del capital $\to 1$ (contra Kaldor).



Sobelow: γ_k cae hacia $sA - (n+\delta)$

I.3. Valoración

- *Comparten*: capital amplio con PMg que no cae; AK escondido.
- *Consiguen*: la política cambia la *tasa*.
- *No consiguen*:
  - explicar el progreso técnico; evitar el filo de la navaja;
  - ajustarse a la evidencia (sin convergencia salvo Sobelow).
- Falta la I+D deliberada ⇒ abandonar la competencia perfecta.

II. 2.ª generación: competencia imperfecta e I+D 9′

Si el crecimiento se debe a ideas creadas a propósito, hace falta competencia imperfecta para pagarlas, y el mercado no crea las ideas que convienen: la política de innovación puede cambiar la tasa de crecimiento.

II.1. Idea

- 3 premisas (Romer, 1990): progreso técnico = motor; resulta de I+D que busca beneficios; ideas no rivales y parcialmente excluibles.
- Réplica con $K, L \Rightarrow F(\kappa K, \kappa L, \kappa N) > \kappa F$.
  - Por Euler, pagar PMg a K y L agota Y: nada para el inventor.
  - Hace falta poder de mercado (patentes): sacrifica eficiencia estática [3.A.15].
- 2 familias: **variedades** (horizontal) y **calidades** (vertical, destrucción creativa).

II.2. Modelos

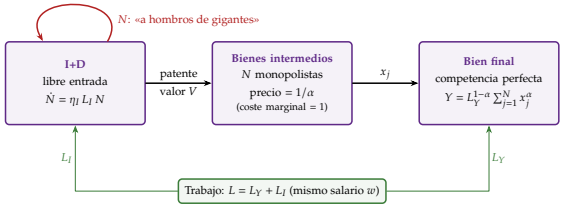
Aumento del número de variedades (Romer, 1990)

▹ *a) Idea y b) modelo*

- CES de Dixit-Stiglitz [3.A.18]: preferencia por la variedad.
- 3 sectores: bien final competitivo; intermedios en monopolio (patente); I+D con libre entrada:

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{N} x_j^\alpha, \qquad \dot{N} = \eta_I L_I N$$

  - «A hombros de gigantes»: N hace más productivos a los investigadores.



Los 3 sectores de Romer (1990)

- Con s y s_I constantes: Solow con N endógena: $\gamma_y = \gamma_N = \eta_I s_I L$.
- Con mercado, hacia atrás [3.A.14]:
  - demanda de Dixit-Stiglitz, $\sigma = 1/(1-\alpha)$: margen $1/\alpha$ sobre el coste marginal;
  - patente $V = B_j/r$; libre entrada $\eta_I N V = w \Rightarrow r = \alpha\eta_I L_Y$:

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

$$\gamma^{\mathrm{E}} = \frac{\alpha\eta_I L - \rho}{\alpha + \theta} < \gamma^{\mathrm{P}} = \frac{\eta_I L - \rho}{\theta}$$

- *Implicaciones*:
  - sin convergencia; *efecto escala* ($\uparrow L$);
  - 2 distorsiones: *estática* (margen) y *dinámica* (desbordamiento) $\Rightarrow$ 2 instrumentos;
  - **trampa de estancamiento** si $\alpha\eta_I L < \rho$;
  - integración = duplicar L (Rivera-Batiz-Romer, 1991);
  - instituciones (North-Thomas, 1973; Estatuto de Monopolios, 1624).

▸ *c) Extensiones, d) evidencia y e) valoración*

- Grossman-Helpman (1991): política comercial y coste de la I+D [3.B.9].
- I+D óptima 2-4 veces la observada (Jones-Williams, 1998).
- Ganancias de la variedad importada (Broda-Weinstein, 2006).
- Laboratorio con bien final: AK en ideas.
- Contra: efecto escala; $\dot{N}$ lineal en N (filo); sin obsolescencia.

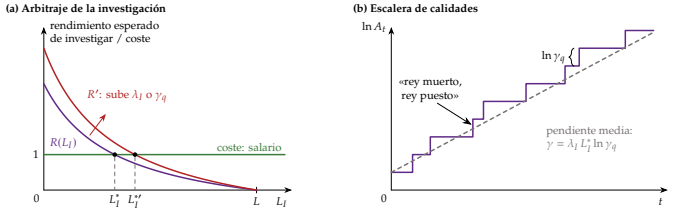
Mejoras de calidad (Aghion-Howitt, 1992)

▸ *a) Idea y b) modelo*

- Mejorar deja obsoleto lo anterior: «rey muerto, rey puesto».
  - Innovaciones Poisson $\lambda_I L_I$, cada una $\times\gamma_q$ (**escalera de calidades**).
  - El titular no investiga (**efecto reemplazo**) [3.A.17].
- Valor con **obsolescencia** $V = B/(r + \lambda_I L_I)$; arbitraje $w = \lambda_I V$:

$$1 = \lambda_I \gamma_q \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{L - L_I}{\rho + \lambda_I L_I}$$

$$\gamma = \lambda_I L_I^* \ln \gamma_q$$



Aghion-Howitt: arbitraje de la investigación y escalera de calidades

- *Implicaciones*:
  - a saltos; $\downarrow$ *con la competencia*: **efecto schumpeteriano**;
  - innova de menos o de más (**robo de negocio**): subvención ambigua;
  - perdedores frenan la entrada [3.A.20].

▸ *c) Extensiones y d) evidencia*

- **U invertida** competencia-innovación (Aghion et al., 2005).
- **Distancia a la frontera** (Acemoglu-Aghion-Zilibotti, 2006): imitar lejos, innovar cerca [3.B.28].
- Cambio técnico dirigido, tecnologías limpias (Acemoglu et al., 2012) [3.B.31]; Mokyr (2002).
- Crecimiento por mejora de productos propios (Garcia-Macia-Hsieh-Klenow, 2019); **trampa de la renta media**.

II.3. Valoración

- Progreso técnico = decisiones de empresas; financiación por monopolio; el mercado no innova lo que conviene.
- Marco de patentes, I+D, competencia y apertura; variedades y calidades conviven.
- Comparten con la 1.ª el filo de la navaja (lineal en N) $\Rightarrow$ efecto escala.

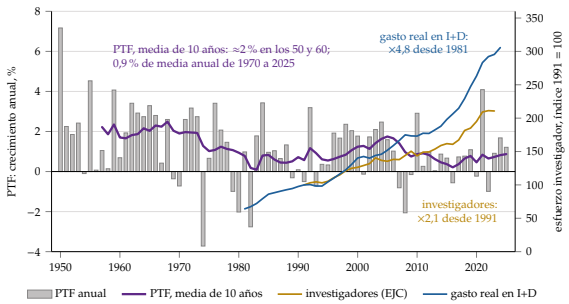
Modelo	r que no cae	γ a LP	¿Óptimo?
AK	$A - \delta$	$(A - \delta - \rho)/\theta$	Sí
Barro	$(1-\tau)\alpha\bar{A} - \delta$	máx. en $\tau^* = 1 - \alpha$	No
Externalid.	$\alpha A L^{1-\alpha} - \delta$	$(\alpha A L^{1-\alpha} - \delta - \rho)/\theta$	No
U-L	$B - \delta_H$	$(B - \delta_H - \rho)/\theta$	Sí si $\eta = 0$
Sobelow	$\to A - \delta$	$\to sA - (n + \delta)$	—
Romer	$\alpha\eta_I L_Y$	$(\alpha\eta_I L - \rho)/(\alpha + \theta)$	No
A-H	ρ	$\lambda_I L_I^* \ln \gamma_q$	Ambiguo
Jones	—	$\lambda n/(1-\phi)$	No

III. Rendimientos crecientes y efecto escala 6′

Los rendimientos crecientes que importan son los de las ideas (no rivalidad). Pero las ideas son cada vez más difíciles de encontrar: el crecimiento de LP depende de cuántas personas las buscan, y la política cambia sobre todo el nivel, *durante décadas, lo que no la hace menos importante.*

III.1. No rivalidad y efecto escala

- Renta pc según las ideas *totales*: más personas, más ideas; en Romer y A-H, L sube la *tasa*.
- Muy LP, sí (Kremer, 1993): el crecimiento de la población mundial sube con su tamaño.
- Posguerra, no:
  - EE. UU., investigadores ×2 desde 1991 e I+D real ×≈5 desde 1981;
  - PTF ≈2 % en los 50-60 y 0,9 % desde 1970 $\Rightarrow$ Jones (1995) rechaza el efecto escala.



EE. UU., 1950-2025: el esfuerzo investigador crece, la PTF no se acelera

III.2. Jones (1995)

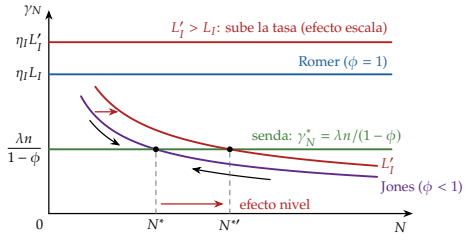
▸ *a) Idea y b) modelo*

- Romer con rendimientos decrecientes en las ideas:

$$\dot{N} = \eta_I L_I^{\lambda} N^{\phi}, \quad 0 < \lambda \leq 1,\ \phi < 1$$

  - $\lambda < 1$: duplicación; $\phi > 0$, hombros de gigantes; $\phi < 0$, las fáciles ya se encontraron.

$$\gamma_N = \frac{\lambda\, n}{1 - \phi}$$



γ_N en Romer ($\phi = 1$) y Jones ($\phi < 1$)

▸ *Implicaciones, c) extensiones y d) valoración*

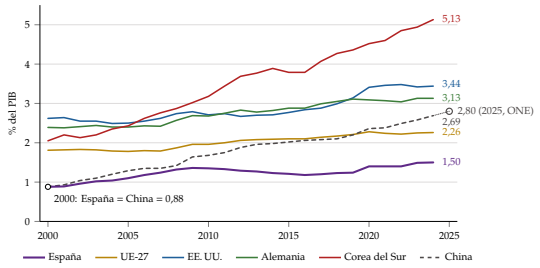
- **Semiendógeno**: tasa según n exógena; sin efecto escala en la tasa, sí en el *nivel*.
  - Política: nivel, no tasa, con transición de décadas. Vuelve la convergencia condicional.
- $\uparrow L_I$: más crecimiento un tiempo y vuelta a la misma tasa con más ideas; en Romer, la tasa sube para siempre.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

- Totalmente endógenos: sin efecto escala, con otro filo; la IA, esfuerzo sin población.
- A favor: concilia la innovación con los datos. Contra: el motor último es la demografía.

III.3. Evidencia y política

- Bloom et al. (2020): esfuerzo ×23, productividad de la investigación ÷41 $\Rightarrow \phi < 1$.
- Ley de Moore: más de 18 veces más investigadores que a inicios de los 70.
- Freno de la población: si deja de crecer, con $\phi < 1$ el conocimiento se estanca: el «planeta vacío» (Jones, 2022).
- El último siglo se apoyó en aumentos con límite: escolarización y proporción de investigadores (Jones, 2023).
- Educación: calidad > años; externalidades moderadas.
- Convergencia lenta: neoclásicos y semiendógenos, no AK ni Romer [3.A.45].



Gasto en I+D (% del PIB): España 1,50 % frente a UE 2,26 % y China 2,69 % (2024)

- *Política*:
  - *crear ideas*: I+D, incentivos fiscales (Bloom-Van Reenen-Williams, 2019), Ley 17/2022: 1,25 % público en 2030 [4.A.7]; patentes (Nordhaus, 1969) [3.A.15];
  - *difundirlas y usarlas*: educación [3.A.25]; competencia, U invertida y entrada [4.A.15]; apertura [3.B.9];
  - *el marco*: gasto e impuestos (Barro, Rebelo) [3.A.38]; instituciones (Mokyr) [3.A.45];
  - política industrial: horizontal vs. sectorial (riesgo de captura).
- Neoclásicos, nivel; endógenos, tasa; semiendógenos, nivel durante décadas.

Conclusión *1′*

- **Recapitulación**:
  - 1.ª generación: capital amplio sin rendimientos decrecientes, el r del ahorro no cae; no explica el progreso técnico;
  - 2.ª: ideas de empresas con rentas de monopolio (variedades, calidades); el mercado no crece lo que conviene;
  - ideas no rivales $\Rightarrow$ rendimientos crecientes; sin efecto escala en los datos: Jones, sobre todo nivel, durante décadas.
- **Relevancia**: política de I+D, competencia, educación; brecha UE-EE. UU.; recesiones con efectos permanentes.
- **Extensiones**: causas últimas (Acemoglu-Johnson-Robinson, 2001) [3.A.45] [3.B.9] [3.B.28] [3.B.31].
- **Opinión**: ideas = motor, pero cada vez más caras; España: capital humano, innovación y competencia; lo que está en juego, «una vez que uno empieza a pensar en ellas, es difícil pensar en otra cosa» (Lucas, 1988).
- **Idea final**: sí se crece para siempre, no acumulando más de lo mismo, sino encendiendo unas ideas en otras, como la vela de Jefferson.
  - Cada generación ha subestimado cuántas recetas quedaban por descubrir (Romer, 2008).
  - «Más vale maña que fuerza».

Datos clave

- I+D/PIB 2024: España **1,50 %** (INE); UE **2,26 %** (Eurostat); EE. UU. **3,44 %** (OCDE).
- PTF EE. UU.: **0,9 % desde 1970** (Fernald).
- Productividad de la investigación **÷41** (Bloom et al., 2020).
- Financiación pública de I+D: **1,25 % del PIB en 2030** (Ley 17/2022).

Autores y fechas

1942 Schumpeter: destrucción creativa
1962 Arrow: aprendizaje
1965 Uzawa
1986 Romer: externalidades
1988 Lucas: capital humano
1990 Romer: variedades; Barro
1992 Aghion-Howitt
1995 Jones: semiendógeno

Preguntas del tribunal

1. **¿Qué basta para crecer?** Que el PMg del capital no tienda a 0 (Sobelow).
2. **¿Por qué el AK no converge?** El producto medio no cae.
3. **¿Por qué competencia imperfecta?** Por Euler, pagar PMg agota Y: nada para el inventor.
4. **¿Innova el mercado de menos?** Romer, sí; A-H, ambiguo.
5. **¿Efecto escala?** Más población, más tasa; rechazado (Jones, 1995).
6. **¿Por qué $\tau^* = 1-\alpha$ en Barro?** Equilibra gasto productivo e impuesto: $\partial Y/\partial G = 1$.

Ojo en el test

- A en el AK *no* es progreso técnico.
- Sobelow solo incumple Inada en ∞.
- Romer: denominador $\alpha + \theta$.
- Jones: $\phi < 1$ (no $\phi < 0$).
- Sobelow (1990) ≠ Jones (1995).
- U-L: γ no depende de A; H es *rival*, las ideas no.
- A-H: más competencia ↓ crecimiento en el básico; U invertida solo paso a paso.
- AK sin ineficiencia dinámica: $r > \gamma_Y$.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal