Crecimiento económico (I). Acumulación de capital y progreso técnico exógeno. El modelo de Solow. El modelo de Solow aumentado con acumulación de capital humano. El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans.

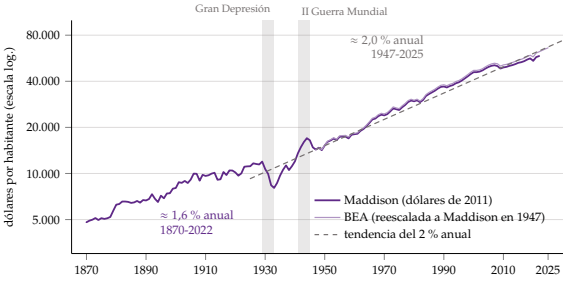
Introducción *2′30″*

- **Enganche**: «Poco a poco se llega lejos», pero depende de *cómo*.
  - 1956, Jruschov: «os enterraremos»; la URSS crecía acumulando factores, sin aprender a usarlos; casi parada en los 80 (Krugman, 1994).
  - ¿Se puede crecer siempre acumulando capital? ¿Por qué unos países son más ricos?
- **Relevancia**: regla del 70: al 2 % la renta se duplica en ≈35 años.
  - EE. UU.: PIB pc ≈2 % anual, no garantizado (Jones, 2023). Lucas (1988): «difícil pensar en otra cosa».
- **Contextualización**: **crecimiento**: aumento sostenido de la producción por habitante.
  - **Senda equilibrada** = **estado estacionario** en unidades de trabajo eficiente.
  - **Convergencia** absoluta / condicional; causas **próximas** vs. **últimas**.
  - **Hechos de Kaldor** (1961): Y/L y K/L crecen a tasa constante; r, K/Y y participaciones estables; crecimiento distinto entre países.
  - Harrod-Domar → Solow-Swan (1956) → Cass-Koopmans (1965) → MRW (1992) → endógeno [3.A.44].
- **Problemática**: ¿sostiene la acumulación el crecimiento? ¿Convergerán los países? ¿Ahorra el mercado lo que conviene?
- **Estructura**: I, Solow; II, capital humano y extensiones; III, RCK: cada modelo responde a un límite del anterior.

Introducción ..... 2′30″
I. El modelo de Solow ..... 10′
1. Idea: de Harrod-Domar a Solow ..... 1′30″
2. EE, regla de oro, convergencia ..... 7′
3. Evidencia y valoración ..... 1′30″
II. Capital humano y extensiones ..... 5′30″
1. MRW (1992) ..... 4′
2. Otras extensiones ..... 1′30″
III. Ramsey-Cass-Koopmans ..... 11′
a) Idea y b) modelo ..... 8′15″
c) Evidencia y d) extensiones ..... 2′15″
e) Valoración ..... 0′30″
Conclusión ..... 1′

I. El modelo de Solow *10′*

Con una función de producción neoclásica, la economía converge a un estado estacionario único y estable. Por los rendimientos decrecientes del capital, el ahorro cambia el nivel *de la renta, no su crecimiento a LP, que es el del progreso técnico, exógeno.*



PIB por habitante de EE. UU., 1870-2025 (escala log.): ≈2 % anual

I.1. Idea: de Harrod-Domar a Solow

- Harrod (1939), Domar (1946): Keynes a LP; $v \equiv K/Y$ fija; $S = sY$.
  - **Tasa garantizada** s/v, *inestable*; **tasa natural** n.
  - Pleno empleo exige $s/v = n$, casualidad: **filo de la navaja**.
- Solow (1956)-Swan (1956): K y L se sustituyen, v se ajusta:

$$s\,\frac{f(\tilde{k}^*)}{\tilde{k}^*} = n + g + \delta \iff \frac{s}{v^*} = n + g + \delta$$

  - H-D = caso límite con elasticidad de sustitución nula.
  - Cambridge (Inglaterra): s endógena por el reparto (Kaldor, 1957; Pasinetti, 1962).

I.2. Modelo: estado estacionario, regla de oro y convergencia

Supuestos

- Cerrada, sin SP, 1 bien; $S = sY$ (no optimiza); competencia perfecta; $\dot{K} = I - \delta K$.
- **Función neoclásica** $Y = F(K, AL)$ (AL = **trabajo eficiente**):
  - PMg > 0 y decrecientes; RCE [3.A.11];
  - **condiciones de Inada**: garantizan un EE interior;
  - $\gamma_A = g$, $\gamma_L = n$ exógenas; tecnología no rival [3.A.23].
- **Teorema de Uzawa** (1961): con senda equilibrada, progreso neutral Harrod.
  - **Controversia del capital**: Robinson, Sraffa (*reswitching*) [3.A.4].

Desarrollo

▸ ***La ley fundamental de movimiento***

- $k \equiv K/L$ per cápita; $\tilde{k} \equiv K/(AL)$ por trabajo eficiente. Con $g = 0$:

$$\dot{k}_t = s\,f(k_t) - (n + \delta)\,k_t$$

  - Carrera entre la **curva de ahorro** $s\,f(k)$ y la **inversión de reposición** $(n + \delta)k$.

▸ ***El estado estacionario***

- $s\,f(k^*) = (n + \delta)k^*$: existe, único y *estable*. Cobb-Douglas:

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad y^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

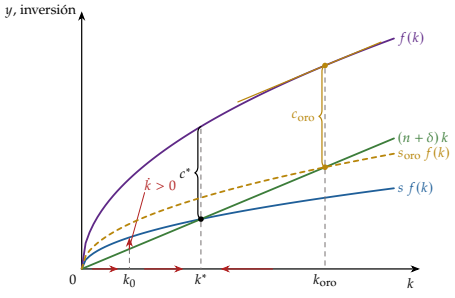
  - En el EE, *sin crecimiento per cápita*; agregados a n.

▸ ***La regla de oro de la acumulación***

- Phelps (1961): s que maximiza $c^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*$:

$$f'(k_{\text{oro}}) = n + \delta$$

  - $r_{\text{oro}} = n$; Cobb-Douglas: $s_{\text{oro}} = \alpha$.



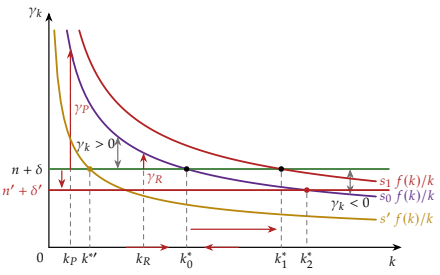
Regla de oro: tangente a f paralela a $(n + \delta)k$

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

- **Ineficiencia dinámica** ($s > s_{oro}$): bajar s sube c ya y siempre.
  - «La avaricia rompe el saco».
  - Si $s < s_{oro}$, subir s cuesta consumo en la transición: conflicto intergeneracional.

▸ *La representación en tasas*

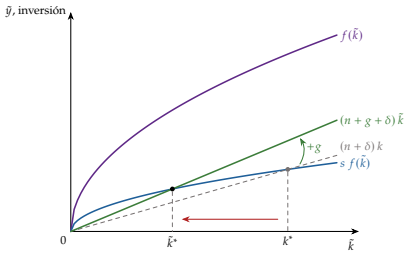
- $\gamma_k = s\,f(k)/k - (n+\delta)$. 2 resultados:
  1. sin g, no hay crecimiento per cápita a LP;
  2. **convergencia condicional**: más deprisa cuanto más lejos de *su* EE.



Solow en tasas: el pobre (k_P) crece más que el rico (k_R)

▸ *Estática comparativa*

- $\uparrow s$: c cae al instante; k e y crecen en la transición; a LP, y más alta: *efecto nivel* (c^* sube solo bajo la regla de oro).
- $\downarrow n$ o $\downarrow\delta$: $\uparrow\tilde{k}^*$, nivel.
- *Progreso técnico, única salida*: $\dot{\tilde{k}} = s\,f(\tilde{k}) - (n+g+\delta)\tilde{k}$.
  - $\gamma_y = \gamma_k = \gamma_c = g$, r^* constante, w a g $\Rightarrow$ hechos de Kaldor.
  - $\uparrow g$: $\downarrow\tilde{k}^*$ y $\tilde{y}^*$, pero $\uparrow\gamma_y$.



Con progreso técnico: la recta $(n+g+\delta)\tilde{k}$

▸ *La dinámica de transición*

- **Velocidad de convergencia**:

$$\frac{d\ln\tilde{k}}{dt} \simeq -\lambda(\ln\tilde{k} - \ln\tilde{k}^*), \quad \lambda = (1-\alpha)(n+g+\delta)$$

  - $\alpha = 1/3$, $n+g+\delta = 0{,}06$: $\lambda = 4$ %, **semivida** ≈ 17 años.

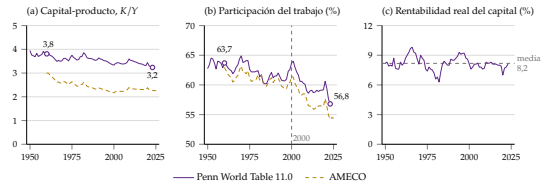
Implicaciones

- Crecimiento exógeno («maná caído del cielo»): la política cambia nivel y transición.
- Convergencia condicional; absoluta solo con parámetros iguales.
- Paradoja de Lucas (1990): el capital no fluye a los pobres.

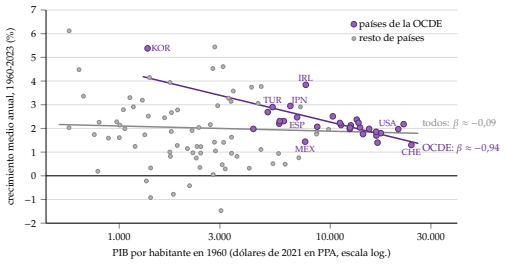
I.3. Evidencia y valoración

Evidencia empírica

- Kaldor: se cumplen en EE. UU., salvo la caída de la participación del trabajo (64 → 57 %) [3.A.45].
- **Contabilidad del crecimiento** (Solow, 1957): capital explica 1/8; 7/8 = **residuo de Solow**.
- Convergencia: no absoluta salvo OCDE; condicional, 1,4-2 % (la mitad de lo previsto).
- s y n explican ≈60 % de las diferencias, pero con α implícita 0,6.



Hechos de Kaldor en EE. UU.: K/Y, rentabilidad y participación del trabajo



PIB pc 1960 y crecimiento 1960-2023: sin convergencia absoluta salvo en la OCDE

Valoración

- \+ sencillo, estable, Kaldor, marco de contabilidad.
- −:
  - *cuantitativa*: explica poco y converge muy rápido → II;
  - *normativa*: ahorro como regla → III;
  - *teórica*: g sin explicar [3.A.44].

II. Solow con capital humano y otras extensiones *5'30''*

Con capital humano, Solow explica buena parte de las diferencias de renta con participaciones realistas y una convergencia lenta, como la observada; pero el crecimiento a LP sigue siendo el de g. Solo levantar los rendimientos decrecientes cambia la conclusión.

II.1. Mankiw-Romer-Weil (1992)

▸ *a) Idea y b) modelo*

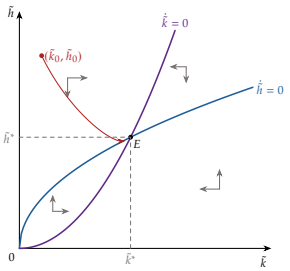
- Falta un factor acumulable: **capital humano** H [3.A.25]; capital amplio ≈ 2/3.

$$Y = K^\alpha H^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}, \quad \alpha+\beta < 1$$

  - s_K, s_H; misma δ; con $\alpha+\beta = 1$, endógeno.
- EE único y estable; **ecuación de MRW**:

$$\ln y = \ln A_0 + gt + \frac{\alpha\ln s_K + \beta\ln s_H - (\alpha+\beta)\ln(n+g+\delta)}{1-\alpha-\beta}$$

  - Omitir H sesga al alza los coeficientes (α de 0,6).
- *Implicaciones* ($\alpha = \beta = 1/3$):
  - elasticidad a $s_K = 1$ (doble); a $n+g+\delta = -2$;
  - $\lambda = 2$ %, semivida ≈ 35 años; a LP sigue g.



MRW en $(\tilde{k}, \tilde{h})$: EE único y estable

▸ *c) Extensiones y d) evidencia*

- 98 países, 1960-85: Solow $R^2 \approx 0{,}59$; ampliado **78 %**, $\alpha \approx 0{,}31$, $\beta \approx 0{,}28$.
  - PWT 11.0, 1960-2023: 0,54 → 0,76.
- $h = e^{\phi(S)}$ con Mincer (Hall-Jones, 1999): su h, por trabajador, no es el $\tilde{h} \equiv H/(AL)$ de MRW. **Contabilidad del desarrollo** (Caselli, 2005): la mayor parte es A.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

▸ *e) Valoración*

- Mala medida de s_H; A_0 correlacionado con la inversión; g sin explicar → Uzawa-Lucas [3.A.44].

II.2. Otras extensiones

▸ *Trampas de pobreza*

- Azariadis-Drazen (1990): f en S; $s\,f(k)/k$ corta 3 veces a $n+\delta$: 2 EE estables (pobre y rico) y un umbral inestable.
  - Inada se sigue cumpliendo (habla de f' en 0 y en ∞).
  - «Al perro flaco todo son pulgas»: **gran empujón** (Rosenstein-Rodan, 1943); también si s o n dependen de la renta.
  - Poca evidencia por países (Kraay-McKenzie, 2014) [3.B.28].

▸ *Recursos, dinero y 2 sectores*

- Recursos: restan crecimiento, no lo impiden si g es alto (Nordhaus, 1992; Solow, Stiglitz, 1974).
- Dinero: Tobin (1965), ↑inflación ↑k^*; Sidrauski (1967): **superneutralidad** [3.A.35] [3.A.41].
- 2 sectores (Uzawa, 1961-63).

▸ *Hacia el crecimiento endógeno*

- *AK* (Rebelo, 1991): $\gamma = sA - (n+\delta)$; *Sobelow* (Jones-Manuelli, 1990); Barro (1990) [3.A.38].

III. Ramsey-Cass-Koopmans *11′*

Con ahorro elegido por hogares que optimizan, se mantienen los resultados positivos de Solow (EE estable, crecimiento exógeno, convergencia condicional) y se gana el análisis normativo: el equilibrio competitivo es eficiente, sigue la regla de oro modificada y nunca acumula de más. Marco de la política fiscal.

a) Idea

- Ramsey (1928): ¿cuánto debe ahorrar una nación? Cass, Koopmans (1965).
  - s endógena y análisis normativo; 3 formas, mismo resultado.

b) Modelo

- Hogar representativo, vida infinita, $L = e^{nt}$:

$$U_0 = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}u(c)dt, \quad u(x) = \frac{x^{1-\theta}-1}{1-\theta}$$

  - $1/\theta$ = **elasticidad de sustitución intertemporal** [3.A.10]; ρ: **preferencia temporal**.
  - **No Ponzi**; **utilidad acotada**: $\rho - n > (1-\theta)g$.
- Control óptimo [3.A.29]: $c^{-\theta} = \lambda$; $\dot\lambda/\lambda = \rho - r$; **transversalidad**. **Euler**:

$$\gamma_c = \frac{r-\rho}{\theta} \iff \frac{\dot{\tilde c}}{\tilde c} = \frac{f'(\tilde k) - \delta - \rho - \theta g}{\theta}$$

  - $r = \rho + \theta\gamma$: fórmula de Ramsey del descuento climático [3.B.31].
- Acumulación:

$$\dot{\tilde k} = f(\tilde k) - \tilde c - (n+g+\delta)\,\tilde k$$

▸ *El diagrama de fases*

- $\dot{\tilde c} = 0$ vertical en $f'(\tilde k^*) = \rho + \delta + \theta g$; $\dot{\tilde k} = 0$, U invertida con máximo en $\tilde k_{\text{oro}}$.
  - Utilidad acotada ⇒ $\tilde k^* < \tilde k_{\text{oro}}$.
  - Cobb-Douglas: $s^* = \alpha(n+g+\delta)/(\rho+\delta+\theta g) < \alpha$ (24 % con valores típicos).
- **Punto de silla**: $\tilde k$ predeterminada, $\tilde c$ salta a la **senda de silla**.
  - Por encima, se agota $\tilde k$; por debajo, viola la transversalidad.

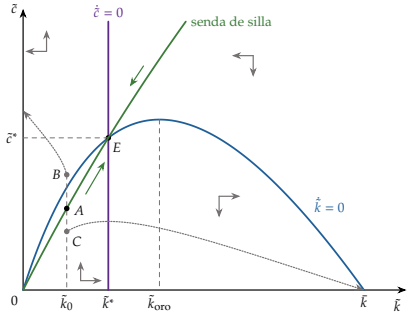


Diagrama de fases de RCK: E a la izquierda de $\tilde k_{\text{oro}}$; senda de silla

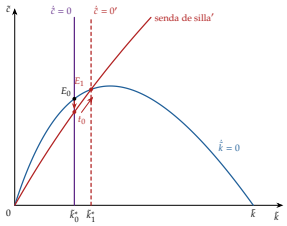
▸ *Implicaciones*

- ↓ρ: $\tilde c$ cae al instante, luego suben $\tilde k$ y $\tilde c$: efecto nivel.
- *Crecimiento exógeno* y *convergencia condicional*, como Solow.
- *Velocidad*: $\lambda \downarrow$ con θ: 10 % ($\theta=1$), 8 % ($\theta=2$), 7 % ($\theta=4$) vs. 5 % de Solow ($n+g+\delta = 0{,}08$).
- *Ahorro en la transición*: baja si $\theta < 1/s^*$; sube si $\theta > 1/s^*$.
- *Planificador*: **1TFEB** (precio-aceptantes, mercados completos, sin externalidades) [3.A.22]; **2TFEB**.
- **Regla de oro modificada**:

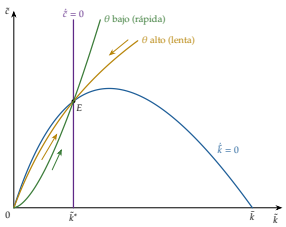
$$f'(\tilde k^*) = \rho + \delta + \theta g$$

  - La impaciencia ⇒ *nunca* ineficiencia dinámica; sin razón para fomentar el ahorro.
  - Con OLG (Diamond, 1965) puede haberla [3.A.29].

	Regla de oro (Solow)	Modificada (RCK)
Condición	$f'(\tilde k_{\text{oro}}) = n+g+\delta$	$f'(\tilde k^*) = \rho+\delta+\theta g$
Maximiza	consumo de EE	utilidad descontada
Inef. dinámica	posible si $s > s_{\text{oro}}$	imposible (impaciencia)



↓ρ: $\dot{\tilde c} = 0$ a la derecha



θ alto: silla más plana

c) Evidencia

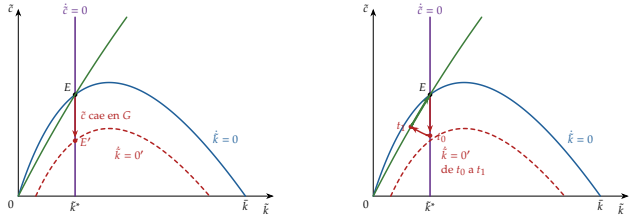
- Converge al 7-10 % vs. 1,4-2 % observado; el capital amplio lo acerca.
- Ahorro subió en el despegue de Japón y el este de Asia: exige θ muy alto o hábitos (Carroll-Overland-Weil, 2000).
- Beneficios del capital > inversión: eficiencia dinámica (Abel et al., 1989).
- Caída del tipo natural con la del crecimiento tendencial (Holston-Laubach-Williams, 2017): $r^* = \rho + \theta g$.

d) Extensiones

▸ *Gasto público y deuda*

- G con impuestos de suma fija [3.A.38]: $\dot{\tilde k} = 0$ baja en G.
  - *Permanente*: $\tilde c$ cae en G; $\tilde k$ y r igual: expulsión completa.
  - *Temporal*: $\tilde c$ cae menos, $\tilde k\downarrow$ y $r\uparrow$ mientras dura.
  - **Equivalencia ricardiana** (Barro, 1974) [3.A.39].

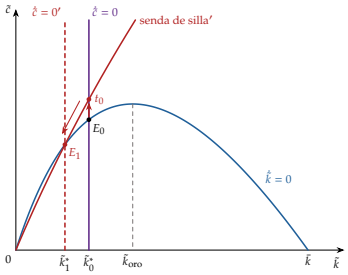
© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal



↑G permanente (izq.) y temporal (der.: de t_0 a t_1)

▸ *Impuestos*

- Sobre consumo o trabajo inelástico = suma fija.
- Sobre rentas del capital: $\dot{\tilde{c}} = 0$ a la izquierda: menos $\tilde{k}$, y, $\tilde{c}$.
  - Óptimo a LP: *nulo* (Chamley, 1986; Judd, 1985).



Impuesto sobre las rentas del capital

▸ *Clima y ciclo*

- DICE de Nordhaus = RCK + daños [3.B.31]; RBC (Kydland-Prescott, 1982) [3.A.42].

e) Valoración

- \+ microfundamenta el ahorro y permite el bienestar: eficiente, regla de oro modificada.
- \+ s varía con θ: las preferencias importan.
- \+ base de la política fiscal, del RBC y de los DSGE de los bancos centrales.
- −:
  - crecimiento exógeno: endogenizar el ahorro no cambia la conclusión;
  - agente representativo de vida infinita: sin conflicto generacional (con OLG cambian eficiencia y equivalencia ricardiana);
  - mercados completos: nada que corregir; con externalidades del conocimiento, se invierte de menos.

Conclusión *1′*

- **Recapitulación**:
  - Solow: estable; crece a g; ahorro, efecto nivel;
  - MRW: capital amplio 2/3, converge al 2 %;
  - RCK: ahorro endógeno, eficiente, regla de oro modificada.
- **Relevancia**: solo la productividad sostiene el crecimiento [3.A.45].
- **Extensiones**: [3.A.44] [3.A.45] [3.B.28] [3.B.31].
- **Opinión**: no explican por qué se crece, pero sí qué no basta: acumular capital; «la productividad no lo es todo, pero a largo plazo es casi todo» (Krugman, 1990).
- **Idea final**: la URSS acumuló y se apagó; EE. UU. creció aprendiendo. «Poco a poco se llega lejos», sí, pero solo si cada paso mejora la forma de andar: no acumular, sino innovar.

Datos clave

- PIB pc EE. UU.: ≈**2 % anual** (Maddison, BEA).
- K/Y EE. UU.: **3,8 (1960), 3,2 (2023)** (PWT 11.0).
- Residuo: **7/8 de Y/hora** (Solow, 1957).
- MRW: R^2 **0,59 → 0,78** (1992); hoy **0,54 → 0,76** (PWT 11.0).
- Velocidad: Solow 4 %, MRW 2 %, RCK 7-10 %.

Autores y fechas

1928 Ramsey: ahorro óptimo
1939 Harrod; Domar, 1946
1956 Solow-Swan
1957 Solow: residuo
1961 Phelps: regla de oro; Kaldor
1965 Cass; Koopmans
1992 Mankiw-Romer-Weil

Preguntas del tribunal

1. **¿Solow vs. Harrod-Domar?** Sustitución: v se ajusta; sin filo de la navaja.
2. **¿Puede ahorrarse demasiado?** En Solow, sí; en RCK, no; con OLG, sí.
3. **¿Por qué mejora MRW?** Capital amplio 2/3: $\lambda = 2$ %, R^2 0,78.
4. **¿↑G permanente con suma fija?** c cae en G; k y r igual.
5. **¿Por qué es eficiente RCK?** 1TFEB: mercados completos, sin externalidades.
6. **¿Por qué es nulo el impuesto óptimo al capital a LP?** Baja el rendimiento del ahorro, $\tilde{k}^*$, $\tilde{y}$ y $\tilde{c}$ (Chamley-Judd).

Ojo en el test

- Regla de oro $f' = n + g + \delta$; modificada $\rho + \delta + \theta g$.
- ↑g *baja* $\tilde{k}^*$ e $\tilde{y}^*$.
- RCK converge *más* deprisa que Solow.
- ↓ρ: c cae al instante; ↑τ_K: c *sube*.
- $\lambda = (1-\alpha)(n+g+\delta)$; en MRW, $(1-\alpha-\beta)(n+g+\delta)$.
- θ = suavizar en el tiempo, no aversión al riesgo (no hay incertidumbre).
- Inada se cumplen aun con trampa; *Sobelow* incumple una.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal