Modelización dinámica de las tomas de decisiones. Modelos de horizonte infinito y modelos de generaciones solapadas.

Introducción *2′30″*

- **Enganche**: «no dejes para mañana lo que puedas hacer hoy».
  - La economía dice «depende»: si lo ahorrado rinde más de lo que cuesta esperar, conviene esperar.
  - Ramsey (1928, 25 años): ¿cuánto de su renta debe ahorrar una nación?
- **Relevancia**: casi todas las decisiones importantes son dinámicas (ahorrar, invertir, educarse, cotizar).
  - Lenguaje de la macro actual desde Lucas.
  - **Mecanismo de equidad intergeneracional**: 0,90 p.p. (2026) → 1,2 (2029-2050), al Fondo de Reserva.
- **Contextualización**: **estático** (variables de un mismo momento) vs. **dinámico** (subíndices temporales).
  - **Principio de correspondencia** (Samuelson, 1947): estática comparativa solo si el equilibrio es estable.
  - Historia: Fisher (1930), Ramsey (1928); Bellman (1957), Pontryagin (1962); MHI (Cass, Koopmans, 1965), MGS (Samuelson, 1958; Diamond, 1965); tras Lucas (1976), agente representativo y luego heterogéneos.
- **Problemática**: ¿cómo deciden cuando hoy cambia mañana? ¿Qué cambia entre un agente inmortal y generaciones que se suceden? ¿Ahorra el mercado lo que conviene?
- **Estructura**: de lo individual a lo agregado: I, la herramienta (3 métodos, una Euler); II, MHI (eficiente) y MGS (puede ahorrar de más). Fuera: juegos dinámicos [3.A.14].

Introducción ..... 2′30″
I. Modelización dinámica ..... 8′30″
1. Consumidores ..... 6′
2. Empresas ..... 2′30″
II. Modelos de agente representativo ..... 18′
1. El agente representativo ..... 2′
2. Horizonte infinito (RCK) ..... 6′
3. Generaciones solapadas y límites ..... 10′
Conclusión ..... 1′

I. La modelización dinámica de las tomas de decisiones *8′30″*

Un problema es genuinamente dinámico cuando una variable de estado une los periodos. Con cualquiera de los 3 métodos, la solución es una condición de arbitraje, la ecuación de Euler, y un precio sombra del estado.

I.1. Decisiones intertemporales de los consumidores

Componentes del problema dinámico

- **Variables flujo** = **de control** (C_t, I_t); **variables stock** = **de estado** (b_t, K_t, reservas).
- 4 piezas: preferencias sobre sendas, restricciones, método, senda óptima.

▸ *a) Las preferencias intertemporales*

- 3 especificaciones: general $U(C_0, C_1, \dots)$; Ramsey, $\sum D(t)u(C_t)$; Samuelson (1937), **descuento exponencial**:

$$U_0 \equiv \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t), \quad \beta \equiv \frac{1}{1+\rho},\ \rho > 0$$

- $u' > 0, u'' < 0$ (alisar). **ESI** $\equiv d\ln(C_{t+1}/C_t)/d\ln|\text{RMS}_{t,t+1}|$. **CRRA**:

$$u(C) = \frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta};\ \ln C\ (\theta = 1);\ \text{ESI} = \frac{1}{\theta}$$

  - θ = aversión relativa al riesgo: misma aversión entre estados y entre periodos (Epstein-Zin las separan).
- *Propiedades* (MWG, 20.B): impaciencia, estacionariedad, separabilidad aditiva, recursividad $U_0 = u(C_0) + \beta U_1$.
  - Impaciencia + estacionariedad ⇒ exponencial, el único consistente.
  - *Crítica conductual* (Thaler): **hiperbólico** (Loewenstein-Prelec, 1992), **cuasihiperbólico** (Laibson, 1997) ⇒ inconsistencia temporal.

▸ *b) Las restricciones*

- Ecuación de estado (lo intertemporal viene de aquí):

$$b_{t+1} - b_t = Y_t + rb_t - C_t, \quad b_0 \text{ dado}, b_{T+1} \geq 0$$

  - Con $T = \infty$, *no-Ponzi*.
  - Intertemporal: VA del consumo = $(1+r)b_0$ + VA de las rentas (con incertidumbre, mercados completos).

Métodos de resolución

▸ *a) Sustitución y Lagrange (discreto)*

- CPO $\beta^t u'(C_t) = \lambda/(1+r)^t$; cociente ⇒ **ecuación de Euler**:

$$u'(C_t) = \beta\,(1+r)\,u'(C_{t+1})$$

  - Utilidad perdida hoy = la que dan mañana el euro y sus intereses, descontada.
  - λ = utilidad marginal de la riqueza. Límite: muchas condiciones; incertidumbre.

▸ *b) Control óptimo (continuo)*

- **Principio del máximo** (Pontriaguin et al., 1956; publ. 1962). $\mathcal{H}_t = u(C_t) + \lambda_t(Y_t + rb_t - C_t)$:
  - $u'(C_t) = \lambda_t$; $\dot\lambda_t = (\rho - r)\lambda_t$; transversalidad $\lim e^{-\rho t}\lambda_t b_t = 0$.
  - Con CRRA: $\dot C_t/C_t = (r-\rho)/\theta$.
  - Ventaja: coestado = **precio sombra** (q, regalía); diagramas de fases.

▸ *c) Programación dinámica (Bellman, 1957)*

- **Principio de optimalidad**: el resto de un plan óptimo es óptimo desde el estado al que lleva. **Función de valor**:

$$V(b_t) = \max_{C_t}\{u(C_t) + \beta V(b_{t+1})\}$$

  - CPO $u'(C_t) = \beta V'(b_{t+1})$ + envolvente $V'(b_t) = (1+r)u'(C_t)$ ⇒ Euler; $V' = \lambda$.
  - *Ejemplo* ($Y = 0$, $\ln C$, $T = \infty$): $C_t = (1-\beta)(1+r)b_t$: fracción fija, independiente de r.
  - Ventajas: incertidumbre, cálculo numérico, regla $C(b_t)$ (ciclo real, búsqueda).

▸ *d) Incertidumbre y e) comparación*

- Euler estocástica: $u'(C_t) = \beta(1+r)\mathbb{E}_t[u'(C_{t+1})]$; expectativas racionales.
- Comparación:
  - *Lagrange*: discreto, finito, senda entera; Fisher, Diamond.
  - *Control*: continuo, fases; q, RCK.
  - *PD*: regla $C(b)$, incertidumbre; Hall, ciclo real.
  - Mismo resultado: Euler; λ, λ_t y V', el mismo precio sombra.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

Aplicaciones: consumo y ahorro

▸ *a) Fisher (1930)*

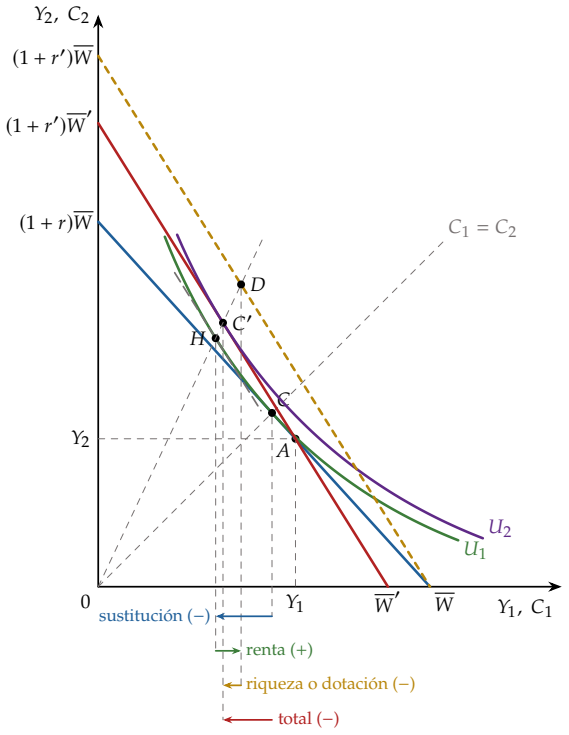
- 2 periodos, $C_1 + C_2/(1+r) = \overline{W}$; con CRRA:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = [\beta(1+r)]^{1/\theta} \implies \ln\frac{C_{t+1}}{C_t} \simeq \frac{r-\rho}{\theta}$$

  - $r \gtrless \rho$: el consumo crece/decrece; no dice si presta (depende de la renta).
  - **Alisamiento**: tasa según r, ρ, θ; nivel según la riqueza total $\Rightarrow$ renta permanente y ciclo vital [3.A.33].
  - ESI baja (Hall, 1988; Campbell-Mankiw, 1989).
  - Política: con ESI baja, gravar menos el interés apenas ↑ahorro.
  - *Límite inferior de los tipos*: con efectivo, $i_t \geq 0$; si hace falta $i < 0$, ajustan cantidades (Krugman, 1998).

▸ *b) Estática comparativa*

- ↑ESI: curvas menos curvadas, más respuesta a r.
- ↑renta: se reparte entre periodos (transitoria, poco; permanente, mucho).
- ↑r (la recta gira sobre la dotación):
  - *sustitución* ↓C_1; *renta* ↑C_1; *riqueza* ↓C_1;
  - total ambiguo si presta, negativo si pide.



Fisher: efectos de una subida del tipo de interés sobre un prestamista

- *Tipo real* (bono 10 años EE. UU.): 2,0 % (1962-2025); 4,2 % (1980-1999); 0,5 % (2008-2021).

▸ *c) Capital humano y d) incertidumbre*

- Becker (1962); **teorema de separación** [3.A.25].
- u cuadrática y $\beta(1+r) = 1 \Rightarrow$ **paseo aleatorio** (Hall, 1978); C-CAPM (Lucas, 1978; Breeden, 1979).

I.2. Decisiones intertemporales de las empresas

Componentes

- Max. VA de beneficios; estado: $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$.
  - Sin fricciones, Jorgenson: $PF_K = P^K(r+\delta)$, sucesión de estáticos.
  - Hacen falta costes de ajuste o recursos agotables.

Aplicaciones

▸ *a) Separación de Fisher: Robinson Crusoe*

- *Sin mercado*: RMT $1 + F'(K_{t+1}) - \delta =$ RMS; la inversión depende de la impaciencia.
- *Con mercado*: $F'(K_{t+1}) - \delta = r$: **separación de Fisher** (Hirshleifer, 1958).
  - Primero maximizar valor, luego prestar/pedir; base del VAN. Falla con restricciones de liquidez.

▸ *b) Costes de ajuste: q de Tobin (1969)*

- Costes convexos $\Phi(I_t)$, $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$:

$$q_t = 1 + \Phi'(I_t), \qquad r\,q_t = B(K_t) + \dot{q}_t$$

  - q = precio sombra del capital instalado; se invierte si $q > 1$.
  - La 2.ª = Euler de un activo [3.A.34].

▸ *c) Recursos agotables: Hotelling (1931)*

- La **regalía** $p_t - \text{CMg} = \lambda_t$ crece a la tasa r.
  - Renta de escasez, no beneficio extraordinario; *paradoja verde* [3.B.31].

II. Modelos de agente representativo *18′*

El agente de vida infinita da un equilibrio eficiente que nunca acumula de más. Basta con vidas finitas que se solapan para que el equilibrio competitivo, sin fallo de mercado, pueda acumular demasiado capital; entonces dinero, deuda y reparto pueden mejorar a todas las generaciones.

II.1. El agente representativo

- *Por qué*: crítica de Lucas (1976): buscar los fundamentos; manejable a costa de la heterogeneidad; base de los EGDE.
  - Antecedentes: *trading bodies* (Jevons, 1871), empresa representativa (Marshall); crítica de Robbins (1928).
- 3 sentidos: todos idénticos; el «medio»; *el que reproduce las decisiones agregadas* (el útil).
- SMD: la racionalidad individual apenas restringe la demanda agregada.
  - Hogar representativo *positivo* $\iff$ **forma polar de Gorman**:

$$V_i(\vec{p}, \overline{W}_i) = a_i(\vec{p}) + b(\vec{p})\,\overline{W}_i$$

  - Engel lineales y paralelas: efectos renta *iguales* (no nulos). *Normativo*: más condiciones.
- Empresa representativa, fácil (sin efectos renta); sector público, peor.
- 2 familias: **MHI** (vida infinita) y **MGS** (vidas finitas que conviven); Weil (1989) combina.

II.2. Los modelos de horizonte infinito

▸ *a) Definición*

- Horizonte no acotado. Natural en la empresa; en el hogar:
  - final incierto (prob. de muerte constante = inmortal más impaciente);
  - **dinastía** altruista (Barro, 1974) $\Rightarrow$ equivalencia ricardiana [3.A.39].

▸ *b) Rasgos*

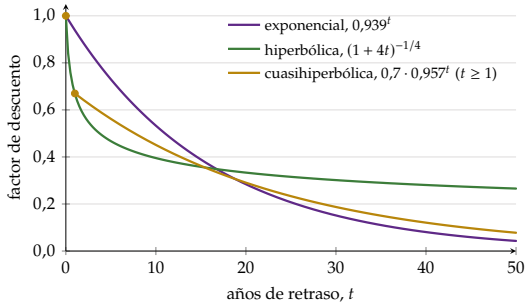
1. Microfundamentados: *menos* expuestos a Lucas, no inmunes.
2. 3 condiciones: utilidad finita, **no-Ponzi** y **transversalidad**:

$$\lim_{T\to\infty} \beta^T u'(C_T)\, b_{T+1} = 0$$

   - Elige, entre las sendas, la que va al EE (Michel, 1982).

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

3. **Consistencia dinámica**: exponencial, el único (Strotz, 1955).
   - Hiperbólico ⇒ infraahorro, mecanismos de compromiso [3.A.1].
   - Gobierno: inconsistencia de la política (Kydland-Prescott, 1977) [3.A.36].



Descuento exponencial, hiperbólico y cuasihiperbólico: mucho entre hoy y mañana, poco entre 2 fechas lejanas

4. *Resolución*: planificador (1TFEB) [3.A.22]; fases; **senda de silla** (Blanchard-Kahn, 1980); calibración [3.A.42].
5. Análisis de bienestar.

▸ *c) Ejemplo: Ramsey-Cass-Koopmans*

- Solow con hogares que eligen el ahorro; utilidad acotada si $\rho - n > (1-\theta)g$:

$$\frac{\dot{\tilde{c}}_t}{\tilde{c}_t} = \frac{f'(\tilde{k}_t) - \delta - \rho - \theta g}{\theta}$$
$$\dot{\tilde{k}}_t = f(\tilde{k}_t) - \tilde{c}_t - (n + g + \delta)\tilde{k}_t$$

  - EE único, punto de silla.
  - **Regla de oro modificada**: $f'(\tilde{k}^*) = \rho+\delta+\theta g > n+g+\delta = f'(\tilde{k}_{\text{oro}})$.
  - *Nunca acumula de más*: equilibrio eficiente [3.A.43].

▸ *d) Aplicaciones*

- Parcial: consumo [3.A.33], q [3.A.34], dinero (Sidrauski) [3.A.35], trabajo [3.A.25].
- General: RCK, *AK*, Uzawa-Lucas [3.A.44], ciclo real y NK [3.A.7], BP intertemporal [3.B.12], DICE (Nordhaus, 1992).

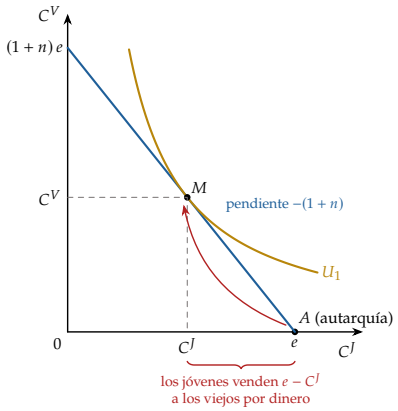
II.3. Generaciones solapadas y heterogeneidad

Definición y rasgos

- **MGS**: vida finita, convive con los sucesores; la economía no acaba (Allais, 1947; Samuelson, 1958; Diamond, 1965).
- Rasgos:
  - se solapan hogares, no empresas; heterogeneidad por edad;
  - existencia, unicidad y estabilidad no garantizadas (Galor-Ryder, 1989);
  - *el 1TFEB puede fallar*: **doble infinitud** (Shell, 1971);
  - posible ineficiencia dinámica.

Samuelson (1958): el dinero como contrato social

- 2 periodos, dotación e perecedera de joven, nada de viejo; sin dinero, *autarquía*.
- Factible en EE: $C^J + C^V/(1+n) = e$: *tipo de interés biológico* n.
  - Con M fijo el dinero rinde $1+n$: $u'(C^J) = \beta(1+n)u'(C^V)$.
  - Autarquía, no Pareto; el monetario mejora a todos.
  - Valor del dinero = burbuja de confianza; reparto igual: «cuando seas padre, comerás huevos».
- Límites: no medio de cambio, equilibrios múltiples, sin capital.



Samuelson: autarquía A y equilibrio monetario M (pendiente $-(1+n)$)

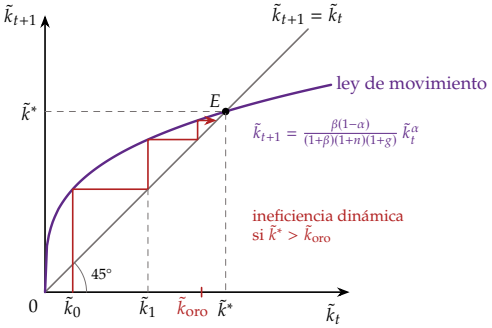
Diamond (1965): la acumulación de capital

▸ *a) Idea y b) Modelo*

- Samuelson + producción de Solow; jóvenes trabajan y ahorran; $\ln C^J + \beta \ln C^V$, $f = \tilde{k}^\alpha$, $\delta = 1$:
  - $S_t = \beta w_t/(1+\beta)$, no depende de r (CRRA: ↑ con r si $\theta < 1$).
  - **Ley de movimiento**:

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\beta)(1+n)(1+g)}\,\tilde{k}_t^\alpha$$

  - Cóncava, único EE estable; $\uparrow\beta\ \uparrow\tilde{k}^*$; $\uparrow n,\ g\ \downarrow\tilde{k}^*$.



Diamond: ley de movimiento cóncava y EE estable; ineficiencia si $\tilde{k}^* > \tilde{k}_{\text{oro}}$

- **Regla de oro** (Phelps, 1961): $f'(\tilde{k}_{\text{oro}}) - \delta \simeq n + g$. **Ineficiencia dinámica** si

$$r^* < (1+n)(1+g) - 1 \simeq n + g$$

  - Reducir $k\uparrow$ el consumo de *todas* las generaciones: «la avaricia rompe el saco».
  - Con $\delta = 1$: $\alpha = 1/3$, nunca; $\alpha = 0{,}3$, si $\beta > 0{,}75$.
  - Causa: se ahorra para la vejez solo con capital; no se presta a los no nacidos.

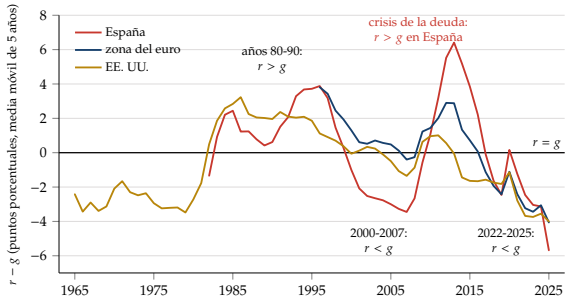
▸ *c) Extensiones: política entre generaciones*

- *Deuda*: desplaza capital: ↓ bienestar si eficiente, ↑ si ineficiente (Blanchard, 2019) [3.A.39].
  - Equivalencia ricardiana falla salvo herencias altruistas (Barro, 1974).
- *Pensiones*: capitalización rinde $1+r$; reparto, $(1+n)(1+g)$ y ↓ capital.
  - Reparto mejor si $n + g > r$: **condición de Aaron** (1966) = ineficiencia dinámica [3.A.38].
  - Envejecimiento $\downarrow n$: dependencia España 31 (2025) ⟶ 55 (2050).
- *Burbujas* (Tirole, 1985): solo si sin ella es ineficiente; la elimina.
- Blanchard (1985)-Yaari (1965): prob. de muerte constante; Auerbach-Kotlikoff (1987).

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

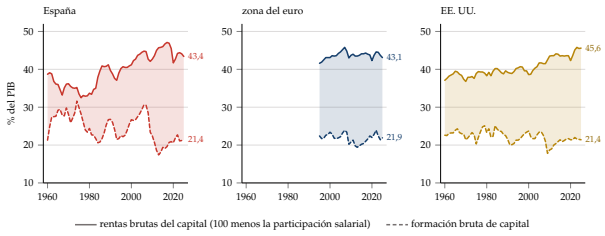
▸ *d) Evidencia empírica*

- $r - g$ (deuda) < 0 casi siempre desde 2000: España −0,8, zona del euro −0,5; > 0 en 1980-1999.



$r - g$, medias de 5 años: España, zona del euro y EE. UU. (AMECO)

- Pero $r < g$ en la deuda *no prueba* ineficiencia: cuenta $f'(\tilde{k}) - \delta$.
  - **Criterio de Abel-Mankiw-Summers-Zeckhauser** (1989): rentas del capital > inversión ⇒ eficiente.
  - 2025: rentas 43-46 % del PIB, inversión 21-22 %; Geerolf (2018): Japón y Corea, quizá de más.



Criterio de Abel et al.: rentas del capital frente a inversión (% del PIB)

▸ *e) Valoración: MHI vs. MGS*

- Hogar inmortal vs. 2 periodos; Euler vs. $S = \beta w/(1+\beta)$.
- Siempre eficiente vs. no si $r^* < n + g$; 1TFEB sí vs. puede fallar.
- Ricardiana sí vs. no; dinero, deuda y reparto neutrales vs. pueden mejorar.
- Usos: ciclo y crecimiento vs. demografía, pensiones, deuda.

Limitaciones y nuevos enfoques

- Validez teórica limitada (Gorman, SMD; Arrow [3.A.24]); puede reaccionar al revés que todos (Kirman, 1992).
- Heterogéneos con mercados incompletos (Aiyagari, 1994; Krusell-Smith, 1998).
- **HANK** (Kaplan-Moll-Violante, 2018): la política monetaria actúa por la renta de los hogares sin liquidez, no por Euler [3.A.37].
- Basados en agentes; comportamiento (De Grauwe); Wren-Lewis (2018): convivencia.

Conclusión 1′

- **Recapitulación**: variable de estado ⇒ dinámica; 3 métodos, una Euler y un precio sombra.
  - MHI eficiente, nunca de más; MGS puede ahorrar de más: dinero, deuda y reparto mejoran a todos.
- **Relevancia**: cimientos de la macro actual (bancos centrales, deuda, pensiones, clima).
- **Extensiones**: [3.A.33] [3.A.34] [3.A.43] [3.A.44] [3.A.39] [3.A.14].
- **Opinión**: la macro debe más a Fisher y Ramsey que a Keynes; las preguntas urgentes son entre generaciones; «todos los modelos son falsos, pero algunos son útiles» (Box).
- **Idea final**: dejar para mañana lo que mañana valga más (= Euler); generaciones que se suceden pueden ahorrar de más: la avaricia rompe el saco.

Datos clave

- Equidad intergeneracional: **0,90 p.p. (2026) → 1,2 (2029-2050)** (LGSS).
- Tipo real 10 años EE. UU.: **2,0 % (1962-2025)** (FRED).
- $r - g$ España: −0,8 **(2000-2025)** (AMECO).
- Rentas del capital **43-46 % del PIB** (AMECO, 2025); inversión **21-22 %** (AMECO).
- Pensiones España: **13,1 % (2022) → 17,3 % (2050)** (CE, *Ageing Report* 2024).

Autores y fechas

1928 Ramsey: ahorro óptimo
1930 Fisher: interés, separación
1957 Bellman: programación dinámica
1958 Samuelson: MGS y dinero
1965 Cass, Koopmans; Diamond
1966 Aaron: condición del reparto
1976 Lucas: crítica
1989 Abel et al.: criterio
2018 HANK (Kaplan-Moll-Violante)

Preguntas del tribunal

1. **¿Cuándo es dinámico un problema?** Cuando una variable de estado une los periodos.
2. **¿Por qué los 3 métodos dan lo mismo?** Mismo problema; λ, λ_t y V' son el mismo precio sombra.
3. **¿Para qué la transversalidad?** Elige la senda que va al EE; no dejar valor al final.
4. **¿Por qué RCK no es ineficiente?** Utilidad acotada $\Rightarrow \rho + \theta g > n + g$.
5. **¿Por qué puede serlo Diamond?** Solo se ahorra con capital; no se presta a los no nacidos.
6. **¿$r < g$ prueba ineficiencia?** No: criterio de Abel et al.

Ojo en el test

- ESI = $1/\theta$; $\theta = 1$, logarítmica.
- Hotelling: crece la *regalía*, no el precio.
- Ineficiencia: $r^* < n + g$ (no solo n).
- Gorman: efectos renta *iguales*, no nulos.
- Con ln: ahorro de Diamond y fracción consumida en Bellman *no* dependen de r.
- Alisamiento con cualesquiera r y ρ; $r > \rho$ no implica ser prestamista.
- q: $q = 1 + \Phi'(I_t)$ (coste *marginal*).
- RCK: regla de oro *modificada* $\rho + \delta + \theta g$; Solow: $n + g + \delta$.
- Principio del máximo: anunciado en 1956, publicado en 1962.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal