Teoría de la demanda del consumidor (II). Dualidad e integrabilidad de las preferencias. Sistemas de demanda utilizados en estudios empíricos. Medidas de cambio en el bienestar.

Introducción 2′

- **Enganche**: «*A falta de pan, buenas son tortas*»: si algo se encarece, uno se apaña con otra cosa y queda casi igual de bien.
  - Pensiones revalorizadas con la media del IPC (+2,7 % en 2026). *¿Basta para quedar igual?*
  - Si los precios suben de forma desigual, se sustituye: importa cuánto cuesta *volver a estar igual de bien*.
  - Utilidad *ordinal*: ¿se puede medir en euros? ⇒ **función de gasto** ⇒ **dualidad**.
- **Relevancia**: *teórica* (Slutsky en 2 líneas; integrabilidad); *empírica* (elasticidades: IVA, índices); *normativa* (VC y VE: coste-beneficio).
- **Contextualización**: ligar *preferencias* (no se ven) y *demanda* (se ve). 4 líneas:
  - *dualidad*: Hotelling (1932) → Shephard (1953), McKenzie (1957);
  - *integrabilidad*: Antonelli (1886) → Hurwicz-Uzawa (1971);
  - *bienestar*: Dupuit (1844) → Hicks, Willig;
  - *sistemas*: Stone (1954) → AIDS (1980); Nobel a Deaton (2015).
- **Problemática**: ¿misma decisión al «dar la vuelta» al problema? ¿Cómo se estiman los sistemas? ¿Qué demandas proceden de preferencias? ¿Cómo medir el bienestar en euros?
- **Estructura**: I, dualidad; II, sistemas de demanda; III, integrabilidad, Slutsky, bienestar.

Introducción . . . 2′
I. Análisis teórico de la dualidad . . . 10′
1. Ingredientes comunes . . . 2′
2. Primal → $\vec{x}$, V; dual → $\vec{h}$, E . . . 5′
3. Relaciones de dualidad . . . 3′
II. Sistemas completos de demanda . . . 5′
1. Idea: fines y requisitos . . . 0′30″
2. Pasos: forma funcional, datos . . . 3′30″
3. Valoración . . . 1′
III. Aplicaciones de la dualidad . . . 12′
1. Integrabilidad . . . 2′30″
2. Slutsky y clasificación . . . 3′30″
3. Bienestar: ΔEC, VC, VE, índices . . . 6′
Conclusión . . . 1′

I. Análisis teórico de la dualidad 10′

Maximizar la utilidad con una renta y minimizar el gasto con una utilidad son el mismo problema visto desde 2 lados. E mide la utilidad en dinero, sus derivadas son las hicksianas (Shephard) y su concavidad da la ley de la demanda compensada.

I.1. Ingredientes comunes

- **Primal**: recursos dados, máx. utilidad; **dual**: utilidad dada, mín. gasto. «Dual» en sentido *estricto*: intercambiar objetivo y restricción.
- *Ingredientes*: $S \subseteq \mathbb{R}^n_+$; preferencias racionales, continuas, localmente insaciables, estr. convexas; U continua, creciente, estr. cuasicóncava [3.A.8]; gasto $\vec{p}\cdot\vec{x}$.
- *Supuestos*: estático, cierto, información perfecta, precio-aceptante.

	Primal (PMU)	*Dual (PMG)*
Objetivo	$U(\vec{x})$ (máx.)	$\vec{p}\cdot\vec{h}$ (mín.)
Restricción	$\vec{p}\cdot\vec{x} \le \overline{W}$	$U(\vec{h}) \ge \overline{U}$
Solución	marshalliana $\vec{x}(\vec{p},\overline{W})$	hicksiana $\vec{h}(\vec{p},\overline{U})$
Función valor	FIU $V(\vec{p},\overline{W})$	gasto $E(\vec{p},\overline{U})$

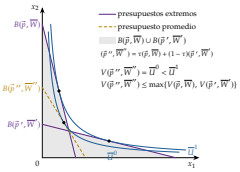
I.2. Problemas primal y dual

a) Problema primal: maximización de la utilidad

- *Desarrollo*: existe (Weierstrass), global y único; λ = **utilidad marginal de la renta**:

$$\begin{array}{ll}\max\limits_{\vec{x}} & U(\vec{x}) \\ \text{s.a.} & \vec{p}\cdot\vec{x} \le \overline{W} \\ & \vec{x} \ge \vec{0}\end{array} \quad\Rightarrow\quad \frac{U_i}{p_i} = \lambda,\ \text{RMS}_{12} = \frac{p_1}{p_2}$$

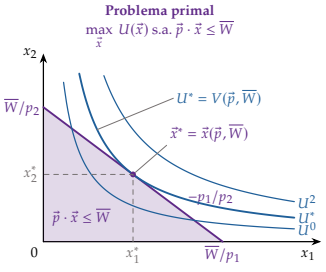
- *Implicaciones*:
  - **demanda marshalliana**: única; continua; grado 0; ley de Walras;
  - **FIU** $V(\vec{p},\overline{W})$: *cuasiconvexa* (no exige preferencias convexas); identidad de Roy.
- *Valoración*: V en «útiles», solo ordena ⇒ ¿y si se da la vuelta?



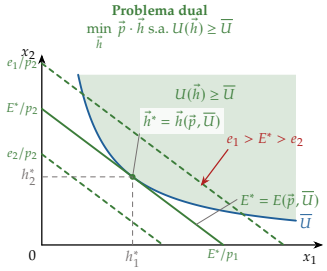
V cuasiconvexa: con el presupuesto promedio no se alcanza más que con el mejor extremo

b) Problema dual: minimización del gasto

- *Desarrollo*: $p_i/U_i = \mu$: *misma* tangencia; $\mu^* = \partial E/\partial\overline{U}$, **coste marginal de la utilidad** $= 1/\lambda^*$.



Primal: la curva de indiferencia más alta alcanzable con $\overline{W}$



Dual: la isogasto más baja que alcanza $\overline{U}$

- **Demanda hicksiana** $\vec{h}(\vec{p},\overline{U})$: grado 0 en $\vec{p}$; **ley de la demanda compensada** $\partial h_i/\partial p_i \le 0$ ⇒ sin Giffen. *No observable.*
- **Función de gasto**: gasto mínimo para alcanzar $\overline{U}$; utilidad en *euros*:

$$E(\vec{p},\overline{U}) = \vec{p}\cdot\vec{h}(\vec{p},\overline{U}) = \begin{array}{ll}\min\limits_{\vec{h}} & \vec{p}\cdot\vec{h} \\ \text{s.a.} & U(\vec{h}) \ge \overline{U} \\ & \vec{h} \ge \vec{0}\end{array}$$

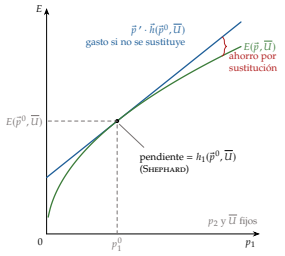
© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

- *Propiedades de E*: homog. de *grado 1* en $\vec{p}$; creciente en $\overline{U}$; no decreciente en p_i; *cóncava* en $\vec{p}$ (el consumidor «pasivo» pagaría $\vec{p}\,' \cdot \vec{h}$; sustituyendo, como mucho eso):

$$E(\vec{p}\,', \overline{U}) \le \vec{p}\,' \cdot \vec{h}(\vec{p}, \overline{U}); \qquad \text{Shephard: } h_i = \frac{\partial E(\vec{p}, \overline{U})}{\partial p_i}$$

$$S_{ij} \equiv \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \, \partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} \quad \textbf{(matriz de Slutsky)}$$

  - *Lema de Shephard* (1953): si p_i sube 1 €, la cesta apenas cambia (envolvente): el gasto sube h_i €.
  - S: *simétrica*; *semidef. negativa*; $S\vec{p} = \vec{0}$ (Euler).



E cóncava: bajo su tangente, de pendiente h_i (Shephard)

Primal: $\vec{x}(\vec{p}, \overline{W})$, $V(\vec{p}, \overline{W})$	*Dual:* $\vec{h}(\vec{p}, \overline{U})$, $E(\vec{p}, \overline{U})$
$\vec{x}$ grado 0 en $(\vec{p}, \overline{W})$	$\vec{h}$ grado 0 en $\vec{p}$
Walras: $\vec{p} \cdot \vec{x} = \overline{W}$	sin exceso: $U(\vec{h}) = \overline{U}$
V grado 0 en $(\vec{p}, \overline{W})$	E grado 1 en $\vec{p}$
V cuasiconvexa	E cóncava en $\vec{p}$
Roy: $x_i = -\dfrac{\partial V / \partial p_i}{\partial V / \partial \overline{W}}$	Shephard: $h_i = \dfrac{\partial E}{\partial p_i}$

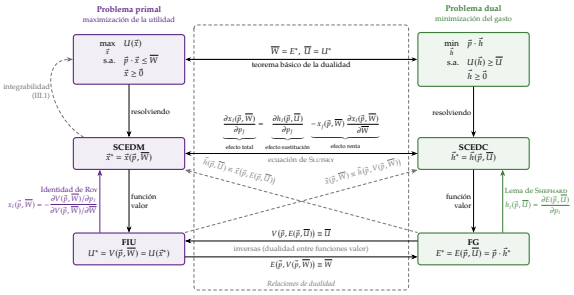
I.3. Relaciones de dualidad

- **Teorema básico de la dualidad**: con U continua, insaciabilidad local y $\vec{p} \gg \vec{0}$, la cesta del PMU resuelve el PMG con $\overline{U} = U(\vec{x}^*)$, y al revés.
- **Coinciden las cestas**, no las funciones:

$$\vec{x}(\vec{p}, \overline{W}) \equiv \vec{h}\big(\vec{p}, V(\vec{p}, \overline{W})\big), \qquad \vec{h}(\vec{p}, \overline{U}) \equiv \vec{x}\big(\vec{p}, E(\vec{p}, \overline{U})\big)$$

$$E\big(\vec{p}, V(\vec{p}, \overline{W})\big) \equiv \overline{W}, \qquad V\big(\vec{p}, E(\vec{p}, \overline{U})\big) \equiv \overline{U}$$

  - V y E, **inversas** en su 2.º argumento.
- *Ejemplo* (Cobb-Douglas): $x_1 = \alpha \overline{W}/p_1 \to V \to E \to h_1 = \alpha E/p_1$.



Esquema de dualidad: problemas, soluciones, funciones valor y relaciones

II. Sistemas completos de demanda 5′

Se elige una E o una V flexible, se derivan demandas estimables y se contrastan las restricciones de la teoría; el AIDS equilibra flexibilidad, coherencia, agregación y sencillez.

II.1. Idea

- **Sistema completo de ecuaciones de demanda**: gasto en *todos* los bienes en función de precios y gasto total, derivado de una optimización.
- *Fines*:
  1. *medir* elasticidades (IVA, índices, pobreza);
  2. *contrastar* la teoría: homogeneidad, simetría, negatividad (III.1);
  3. *valorar* el bienestar (VC, VE).
- *Dualidad*: se especifica E o V y se deriva (Shephard/Roy): coherente *por construcción*.
- *Requisitos* (en tensión): coherencia, flexibilidad, agregación, sencillez.

II.2. Pasos que sigue la literatura

a) Elección de la forma funcional

- Cobb-Douglas: $s_i = \alpha_i$ constantes; homotética: no recoge Engel.
- **LES** (Stone, 1954; Stone-Geary): $U = \sum_i \alpha_i \ln(x_i - \gamma_i)$:

$$p_i x_i = p_i \gamma_i + \alpha_i \big(\overline{W} - \textstyle\sum_j p_j \gamma_j\big)$$

  - Subsistencia + renta *supernumeraria*; Engel rectas sin pasar por el origen.
  - *Aditivo*: sin inferiores ni complementarios; Deaton (1974) rechaza la aditividad.
- **Rotterdam** (Barten, Theil): Slutsky en diferencias; local, sin E explícita.
- **Translog** (1975): $\ln V$ flexible de 2.º orden; rechaza la teoría; no lineal, no agrega.

▸ ***El sistema casi ideal (AIDS; Deaton-Muellbauer, 1980)***

- *Supuestos*: E **PIGLOG**; $a(\vec{p})$ subsistencia, $b(\vec{p})$ saciedad.
- *Desarrollo*: Shephard en logaritmos y $\overline{U}$ despejada:

$$\ln E(\vec{p}, \overline{U}) = (1 - \overline{U}) \ln a(\vec{p}) + \overline{U} \ln b(\vec{p})$$

$$s_i = \alpha_i + \textstyle\sum_j \gamma_{ij} \ln p_j + \beta_i \ln \dfrac{\overline{W}}{P}, \qquad \varepsilon_{x_i, \overline{W}} = 1 + \dfrac{\beta_i}{s_i}$$

- *Implicaciones*: restricciones *lineales*: agregación, homogeneidad $\sum_j \gamma_{ij} = 0$, simetría $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$; $\beta_i > 0$ lujo; *agregación exacta*.
- *Extensiones*: *LA-AIDS* (índice de Stone: MCO); **QUAIDS** (1997): $(\ln \overline{W})^2$, rango 3.
- *Valoración*: «*casi*» ideal: negatividad no garantizada.

Sistema	*Parte de*	*Flex.*	*Agreg.*	*Lineal*	*Límite*
C-D	U directa	no	sí	sí (log)	s_i constantes
LES	U directa	no	sí	no	aditivo
Rotterdam	Slutsky	local	no	sí	sin E explícita
Translog	FIU	sí	no	no	no lineal
AIDS	E PIGLOG	sí	exacta	LA-AIDS	Engel lineal en $\ln \overline{W}$
QUAIDS	E	sí	sí	no	más parámetros

b) Sistema completo, datos, econometría y resultados

- *Sistema*: estimación *conjunta*; **separabilidad débil** y **presupuestación en 2 etapas**.
- *Datos*: microdatos de la **EPF** (INE); valores unitarios (Deaton).
- *Econometría*: se quita una ecuación; gasto endógeno; ceros; demografía.
- *Resultados*: con series agregadas se rechaza sobre todo la *homogeneidad*; Deaton: rigidez, dinámica y, sobre todo, *agregación* ⇒ microdatos.
  - Usos: IVA, incidencia, índices por hogar, pobreza; España: AIDS con la EPF (Sanz-Romero, 2012).

II.3. Valoración

- *Aportaciones*: la teoría, instrumento de medida; restricciones, hipótesis contrastables.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

- *Limitaciones*: flexibilidad vs. parsimonia; agregación (Gorman, SMD); marco estático [3.A.33].
- *Enlace*: ¿procede el sistema de unas preferencias? ⇒ integrabilidad.

III. Aplicaciones de la dualidad *12′*

E traduce la utilidad a euros: la VC y la VE miden exactamente el cambio de bienestar; el ΔEC las aproxima tanto mejor cuanto menor es el efecto renta (Willig), y Laspeyres y Paasche las acotan con un sesgo de sustitución que sigue en los índices oficiales.

III.1. Integrabilidad de las preferencias

- *Pregunta*: dado $\vec{x}(\vec{p}, \overline{W})$ observado, ¿existe una U de la que proceda? Antonelli (1886); Hurwicz-Uzawa (1971).
- **Teorema de integrabilidad**: sí *si y solo si*: ley de Walras; S *simétrica*; S *semidef. negativa*:

$$S_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial \overline{W}} = S_{ji} \quad \text{(observable)}$$

$$\nabla_{\vec{p}} E(\vec{p}, \overline{U}) = \vec{x}(\vec{p}, E(\vec{p}, \overline{U})), \quad E(\vec{p}^{\,0}, \overline{U}) = \overline{W}^0$$

- *Intuición*:
  - de la demanda a E: solución ⇔ derivadas cruzadas iguales (**Frobenius**) ⇔ *simetría*;
  - que sea función de gasto: *concavidad* ⇔ *negatividad*;
  - de E a U: $U(\vec{x}^0)$ = mín. de V entre los presupuestos con los que se compra $\vec{x}^0$.
- *Preferencia revelada* [3.A.8]: axioma débil ⇒ S negativa, *no* simétrica; fuerte (Houthakker) sí racionaliza; con datos finitos, Afriat (1967).
- *Relevancia*:
  - *teórica*: cierra el círculo; las preferencias no añaden nada a 3 propiedades contrastables;
  - *empírica*: contraste sin hallar U;
  - *normativa*: E exacta desde la demanda (Hausman, 1981).

III.2. Ecuación de Slutsky y clasificación

- Derivar $h_i \equiv x_i(\vec{p}, E(\vec{p}, \overline{U}))$ y usar Shephard:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i(\vec{p}, \overline{W})}{\partial p_j}}_{\text{ET}} = \underbrace{\frac{\partial h_i(\vec{p}, \overline{U})}{\partial p_j}}_{\text{ES}} \underbrace{- x_j \frac{\partial x_i(\vec{p}, \overline{W})}{\partial \overline{W}}}_{\text{ER}}$$

  - En elasticidades: $\varepsilon_{x_i, p_j} = \varepsilon^h_{i, p_j} - s_j \, \varepsilon_{x_i, \overline{W}}$.
  - ES inobservable; ET y ER observables ⇒ S calculable.
- *Propiedades de S*: **todo bien tiene al menos un sustitutivo neto** (Hicks).
- *Precio propio*: normal ⇒ ordinario; inferior: ordinario o Giffen (s_i alto). Veblen, fuera.

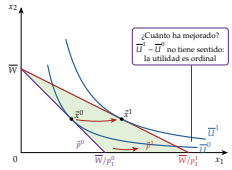
ES propio	*ER propio*	*ET propio*
≤ 0	< 0: normal	≤ 0: ordinario
≤ 0	> 0: inferior	ordinario si $\lvert ES \rvert \geq ER$
		> 0: Giffen si $ER > \lvert ES \rvert$

- *Cruzados*: neta *simétrica* (Hicks-Allen, 1934); bruta no: los ER cruzados difieren.
  - Sustitutivos netos + i inferior ⇒ sustitutivos brutos; complementarios netos + i normal ⇒ complementarios brutos; el resto, ambiguo.
- *Pendientes*: normal, marshalliana más plana que la hicksiana ⇒ VC ≤ ΔEC ≤ VE.

III.3. Análisis de bienestar del consumidor individual

a) Idea

- Un consumidor, cambios de *precios* [3.A.16]; evita comparar personas. Usuario: el decisor público.
- Baja p_1: de $\vec{x}^0$ en $\overline{U}^0$ a $\vec{x}^1$ en $\overline{U}^1$. ¿Cuánto mejora? Utilidad ordinal: $\overline{U}^1 - \overline{U}^0$ no significa nada ⇒ euros con E.



Baja p_1: mejora, pero ¿cuánto?

b) Medición de la variación del bienestar

▹ *Excedente y variaciones (información completa)*

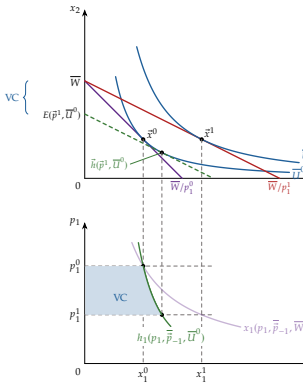
- **Excedente del consumidor** (Dupuit, Marshall): observable, pero *mezcla* ES y ER; con varios precios, depende del camino ⇒ demandas *compensadas* (Hicks).
- **Métrica monetaria** (McKenzie, Samuelson): $E(\vec{\bar{p}}, V(\vec{p}, \overline{W}))$: FIU en euros.
- Las 3 medidas:

$$\Delta EC = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(p_1, \vec{\bar{p}}_{-1}, \overline{W}) \, dp_1$$

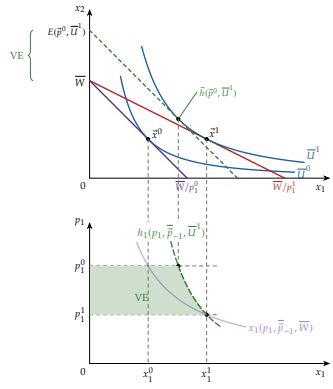
$$VC = \overline{W} - E(\vec{p}^{\,1}, \overline{U}^0) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(\cdot, \overline{U}^0) \, dp_1$$

$$VE = E(\vec{p}^{\,0}, \overline{U}^1) - \overline{W} = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(\cdot, \overline{U}^1) \, dp_1$$

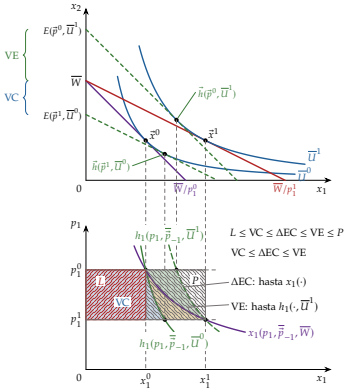
  - **VC**: a precios *finales*, renta que devuelve a la utilidad *inicial*; baja p: lo máximo que pagaría.
  - **VE**: a precios *iniciales*, renta que lleva a la utilidad *final*; baja p: lo mínimo que aceptaría.



VC: a precios finales, vuelta a $\overline{U}^0$



VE: a precios iniciales, hasta $\overline{U}^1$



VC, ΔEC y VE (y L, P) ante una bajada de p_1 de un bien normal

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal

- Orden y aproximación:

$$L \le \text{VC} \le \Delta\text{EC} \le \text{VE} \le P \quad \text{(normal, baja } p_1\text{)}$$

$$\text{Willig (1976), error relativo: } \frac{|\varepsilon_{x_1,\overline{W}}||\Delta\text{EC}|}{2\overline{W}}$$

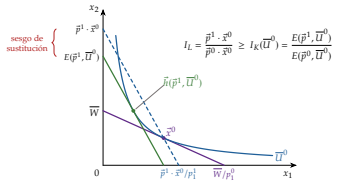
  - Inferior o subida, se invierte; ER nulo: VC = ΔEC = VE.
  - 5 % de la renta y elasticidad 1: error del 2,5 % ⇒ ΔEC vale si el bien pesa poco [3.A.16]; Hausman (1981): falla en la pérdida irrecuperable.
- *¿Cuál usar?* Ordenar políticas: VE; compensar (Kaldor-Hicks [3.A.22]): VC. Exceso de gravamen = −VE − T [4.B.9].

▸ ***Información incompleta e índices de coste de la vida***

- Solo con $\vec{x}^0$ y $\vec{x}^1$: Laspeyres $L \le$ VC, Paasche $P \ge$ VE: **sesgo de sustitución**.
- Konüs (1924), **índice verdadero de coste de la vida**:

$$I_K(\overline{U}) = \frac{E(\vec{p}^1, \overline{U})}{E(\vec{p}^0, \overline{U})}; \quad I_L \ge I_K(\overline{U}^0), \quad I_P \le I_K(\overline{U}^1)$$

  - Laspeyres: aproximación de 1.er orden, por la concavidad *cota superior*: indexar sobrecompensa.
  - Paasche: cota inferior de $I_K(\overline{U}^1)$.
  - Acotan índices *distintos*: $I_P \le I_K \le I_L$ solo con homotéticas; igualdades solo con Leontief.



Laspeyres sobrestima: el sesgo de sustitución

- **Superlativos** (Diewert, 1976): Fisher $\sqrt{I_L I_P}$; Törnqvist (translog).
- **IPC del INE**: tipo Laspeyres encadenado (base 2025) ⇒ sobrevalora; **deflactor del PIB**: Paasche encadenado [3.A.30] [4.A.1].

Conclusión 1′

- **Recapitulación**:
  - un problema da las 4 funciones;
  - AIDS y microdatos;
  - integrabilidad, Slutsky y bienestar: VC, VE; ΔEC aproxima; índices acotan.
- **Relevancia**: de lo inobservable a restricciones sobre lo observable y bienestar en euros: elasticidades fiscales, exceso de gravamen, proyectos, sesgo del IPC.
- **Extensiones**: empresa [3.A.12]; bienestar [3.A.16] [3.A.22] [3.A.24]; sector público [4.B.6] [4.B.9]; índices [3.A.30] [4.A.1]; riesgo y tiempo [3.A.10] [3.A.29].
- **Opinión**: la teoría más abstracta, muy útil en la práctica; límite: consumidor estático; herencia de Deaton: microdatos y heterogeneidad.
- **Idea final**: ¿euros para algo que solo se ordena? Sí: lo que cuesta alcanzar la utilidad.
  - Pensionista con la cesta del IPC: algo sobrecompensado: Laspeyres ignora que sustituye (*a falta de pan, buenas son tortas*); con otra cesta, puede quedarse corto; la exacta, la VC.
  - Sumar el bienestar de personas distintas exige juicios de valor: economía del bienestar.

Datos clave

- Pensiones: **+2,7 % en 2026** (media del IPC).
- EPF: **unos 24.000 hogares** (INE); gasto medio **35.101 €/hogar** (INE, 2025).
- Sesgo del IPC de EE. UU.: **1,1 p./año, 0,4 de sustitución** (Boskin, 1996).

Autores y fechas

1844 Dupuit: excedente
1915 Slutsky
1924 Konüs: índice verdadero
1947 Roy
1953 Shephard: lema
1971 Hurwicz-Uzawa
1976 Willig; Diewert
1980 Deaton-Muellbauer: AIDS

Preguntas del tribunal

1. **¿Por qué $\mu^* = 1/\lambda^*$?** Derivando $E(\vec{p}, V) = \overline{W}$.
2. **¿Hicksiana y Giffen?** Sin ER y E cóncava: imposible.
3. **¿Integrabilidad?** Walras, simetría y negatividad de S.
4. **¿VC o VE?** VE para ordenar; VC para compensar.
5. **¿Por qué el IPC sobrestima?** Laspeyres ignora la sustitución.

Ojo en el test

- E: grado *1* en $\vec{p}$; $\vec{h}$: grado 0.
- Shephard sin signo menos; Roy, con él.
- V cuasiconvexa; E cóncava.

© 2026 Víctor Gutiérrez Marcos · Exclusivo de victorgutierrezmarcos.es y la app Oposición TCEE · DCE · uso personal